Repaso

Temas para el repaso:

1. La distribución binomial.
2. La distribución Poisson.
3. La función generadora de momentos.

Introducción al teorema Ley de los grandes números.

La distribución binomial

Una v.a. X que mide exactamente x "*éxitos*" de n experimentos independientes, donde cada experimento tiene probabilidad p de "*éxito*" y $1-p$ de "*fallo*" es una **distribución binomial** con parámetros n y p.

La función de probabilidad de una distribución binomial es:

$$f(x;p,n) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & x = 0, 1 \ldots, n,\ 0 < p < 1; \\ \\ 0 & e.o.c. \end{cases}$$

El valor de $f(x;p,n)$ es la probabilidad de exactamente x éxitos en n experimentos.

Ejemplo de la distribución binomial

Un alumno va a contestar un examen de opción multiple.
Cada pregunta tiene 5 opciones y el examen tiene 10 preguntas.
El alumno sabe la respuesta de 5 de las preguntas y los restantes 5 preguntas las contesta al azar.
¿Cuál es la probabilidad de que conteste bien en exactamente 8 preguntas, al menos 6 preguntas, y 10 preguntas?
Determina la media, la varianza y la desviación estándar y los coeficientes de asimestría y curtosis.

Soluci’on:

El alumno contesta bien cuando conoce la respuesta.
Es decir, sólo responde al azar 5 de las 10 preguntas.
La respuesta de cada pregunta es independiente a la respuesta de las demas y para el resultado de cada respuesta hay dos opciones o contestó bien o no.
Por lo que la distribución binomial modela esta situación.
Como son 5 opciones, la probabilidad de acertar es 0.2.

$$n = 5 \qquad p = 0.2$$

Solución del ejemplo de la distribución binomial

Sea $X \sim Bin(n=5, p=0.2)$ la v.a. que mide el número de respuestas acertadas (de las 5 que contesta al azar).
La función de probabilidad de la v.a. X es

$$p(X=x;5,0.2) = \binom{5}{x}(0.2)^x(0.8)^{5-x}.$$

La probabilidad de contestar bien exactamente 8 preguntas.

$$p(X=3;5,0.2) = \binom{5}{3}(0.2)^3(0.8)^{5-3} = 10(0.2)^3(0.8)^2 = 0.0512$$

La probabilidad de contestar bien al menos 6 preguntas.

$$\begin{aligned} p(X \geq 1;5,0.2) &= 1 - p(X=0;5,0.2) = 1 - \tbinom{5}{0}(0.2)^0(0.8)^{5-0} \\ &= 1-(0.8)^5 = 0.6723 \end{aligned}$$

La probabilidad de contestar bien exactamente 10 preguntas.

$$p(X=5;5,0.2) = \binom{5}{5}(0.2)^5(0.8)^{5-5} = (0.2)^5 = 0.00032$$

Solución del ejemplo de la distribución binomialcont.

Como $X \sim bin(5, 0.2)$, la media de X es np, la varianza de X es $np(1-p)$, $\alpha_3 = \frac{(1-2p)}{(np(1-p))^{1/2}}$ y $\alpha_4 = 3 + \frac{1-6p(1-p)}{np(1-p)}$:

$$E[X] = 5(0.2) = 1$$

El número esperado de respuestas correctas es $5+1=6$.

$$Var(X) = 5(0.2)(0.8) = 0.8, \qquad \sigma_X = \sqrt{0.8} = 0..$$

La varianza y la desviación estándar del número de respuestas correctas es 0.8. y 0.8944.

$$\alpha_3 = \frac{(1-2(0.2))}{(5(0.2)(1-0.2))^{1/2}} = \frac{(0.6)}{(0.8)^{1/2}} = 0.6708$$

$$\alpha_4 = 3 + \frac{1-6(0.2)(1-0.2)}{5(0.2)(1-0.2)} = 3 + \frac{1-(1.2)(0.8)}{0.8} = 3.05$$

La distribución de X es asimétrico positivamente (datos cargados hacía izquierda) tiene un pico relativamente grande (leptocúrtico).

La distribución Poisson

Sea X una v.a. que representa el número de eventos independientes que ocurren a una **velocidad constante** sobre el **tiempo o espacio.**
La función de probabilidad de una distribución Poisson es:

$$p(x;\lambda) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} & x = 0,1,2,\ldots,\ \lambda > 0 \\ 0 & e.o.c. \end{cases}$$

donde λ es el promedio de ocurrencia por unidad de tiempo o espacio.

Ejemplo de una distribución Poisson

Una farmacia del Dr. Simi cuenta con un consultorio médico en donde hay un sólo médico atendiendo.
En promedio llegan 5 personas a pedir consulta cada hora, el gerente de la farmacia ha observado que el número de clientes que llegan al consultorio durante una hora se puede modelar con una distribución Poisson.
También ha observado que todos los pacientes compran las medicinas en la farmacia cuando son atendidos rápidamente, pero si llegan mas de 3 personas en un lapso cualquiera de 20 minutos, se genera tiempo de espera en el consultorio y baja la frecuencia con la que los pacientes compran las medicinas en la farmacia.
¿Cuál es la probabilidad de que lleguen mas de 3 personas en 20min?
Determina la media, la varianza y la desviación estándar y los coeficientes de asimestría y curtosis.

Solución del ejemplo de una distribución Poisson

Sea X la variable aleatoria que representa el número de personas que llegan al consultorio de la farmacia del Dr. Simi. En promedio llegan 5 de personas durante una hora; para 20min tenemos $\lambda = 5/3$.
La función de probabilidad de X es

$$p(x;\lambda = 5/3) = \frac{e^{-5/3}(5/3)^x}{x!}; \qquad x = 0,1,2,\ldots$$

La probabilidad de que mas de 3 personas es igual a $P(X \geq 4)$:

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - (P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3))$$

$$\begin{aligned}
P(X=0) &= \frac{e^{-5/3}(5/3)^0}{0!} &= 0.18888\\
P(X=1) &= \frac{e^{-5/3}(5/3)^1}{1!} &= 0.31479\\
P(X=2) &= \frac{e^{-5/3}(5/3)^2}{2!} &= 0.26233\\
P(X=3) &= \frac{e^{-5/3}(5/3)^3}{3!} &= 0.14574
\end{aligned}$$

$$P(X \leq 3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = 0.91173$$

por lo que $P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) = 0.08827$
La probabilidad de que lleguen mas de 3 personas al consultorio en 20min es 0.08827

Solución del ejemplo de una distribución Poisson cont.

Como $X \sim Poisson(\lambda = 5/3)$, la media de X es $\lambda = 5/3$, la varianza de X es $\lambda = 5/3$, $\alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ y $\alpha_4 = 3 + \frac{1}{\lambda}$:
El número esperado de personas que lleguen en un lapso de 20min es $\lambda = 5/3$ y la varianza es $\lambda = 5/3$.
La desviación estándar del número de personas que llegan en un lapso de 20min es $\sqrt{5/3} = 1.2909$
y los coeficientes de asimetría y curtosis son

$$\alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{5/3}} = 0.7746 \quad y \quad \alpha_4 = 3 + \frac{1}{\lambda} = 3.6$$

La distribución de X es asimétrico positivamente (los datos están cargados hacía la izquierda) tiene un pico relativamente grande (leptocúrtico).

Función generadora de momentos

Sea X una v.a. discreta para la cual valor esperado $E\left[e^{tX}\right]$ existe para todo $t \in (-h, h)$, para algún $h > 0$.

La **función generadora de momentos** (al rededor del cero) de la v.a. X es la función definida por

$$m_X(t) = E\left[e^{tX}\right] = \sum_x e^{tX} P(x)$$

La condición de la existencia del valor esperado $E\left[e^{tX}\right]$ para todo $t \in (-h, h)$, para algún $h > 0$ es necesaria para que la función $m_X(t)$ sea diferenciable en $t = 0$.

La función generadora de una v.a. es única y determina completamente la distribución.

Dudas

Teorema de los grandes números

Tiramos una moneda n veces, y sea μ la cantidad de veces que obtenemos sol.

Queremos estudiar, para valores grandes de n, la frecuencia μ/n de aparición de sol.

El siguiente resultado, obtenido por J. Bernoulli, en 1713 es un resultado que fundamenta nuestra intuición, de que: "*aproximadamente, la mitad de las veces aparce sol*".

El teorema que presentamos aquí es un caso particular del teorema demostrado por Bernoulli.

Teorema de los grandes números

Dados $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$, números arbitrariamente pequeños, existe un número natural n_0 tal que, para todo $n \geq n_0$,

$$P\left(\left|\frac{\mu}{n} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \eta$$

Dado $\varepsilon > 0$, la probabilidad de que la diferencia entre la frecuencia observada $\frac{\mu}{n}$ y $\frac{1}{2}$ sea menor que ε es arbitrariamente cercana a 1, para valores de n es suficientemente grandes.

Durante la prueba del teorema (que veremos el jueves 12 de noviembre) se prueba que

$$P\left(\left|\frac{\mu}{n} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon\right) = 1 - P\left(\left|\frac{\mu}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$

Ejemplo del Teorema de los grandes números

Calcula la probabilidad de que entre 400 niños que nacen, la cantidad de varones no se desvie del valor que se espera (200) en más de 20: $180 \leq m \leq 220$.

Solución:

La probabilidad de nacimiento de un varón es igual a 1/2. Sea m la cantidad de varones que nacen, con un total de $n = 400$ nacimientos. Vamos a determinar

$$P = P(|m - 200| < 20) = P\left(\left|\frac{m}{n} - \frac{1}{2}\right| < \frac{20}{n}\right).$$

Como aún no contamos con las técnicas, utilicemos la cota obtenida en la prueba del teorema.

Tenemos $\varepsilon = 20/400 = 1/20$, y obtenemos

$$P \geq 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2} = 1 - \frac{1}{4(400)(1/20)^2} = 3/4.$$

Usando otras técnicas podemos obtener que un valor más preciso, pero aproximado, para la probabilidad $P \approx 0.95$.