Distribución binomial y distribución Poisson

Teorema

Sea X una v.a. con distribución binomial y función de probabilidad:

$$f(x;n,p) = \frac{n!}{(n-x)!x!}p^x(1-p)^{n-x} \qquad x = 0,1,2,\dots,n$$

Si para $n = 1,2,\dots$ la relación $p = \lambda/n$ es cierta para alguna constante $\lambda > 0$, entonces

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ p\to 0}} f(x;n,p) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \qquad x = 0,1,2,\dots$$

Prueba del teorema

Primero consideramos la función de probabilidad de la distribución binomial

$$
\begin{aligned}
f(x;n,p) &= \frac{n!}{(n-x)!x!}p^x(1-p)^{n-x} \\
&= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-x+1)(n-x)!}{(n-x)!x!}\frac{(np)^x}{n^x}\frac{(1-p)^n}{(1-p)^x} \\
&= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-x+1)}{n^x}\frac{(\lambda)^x}{x!}\frac{(1-p)^{np/p}}{(1-p)^x} \\
&= \frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n}\ldots\frac{n-x+1}{n}\frac{\lambda^x}{x!}\frac{(1-p)^{\lambda/p}}{(1-p)^x} \\
&= 1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{x-1}{n}\right)\frac{\lambda^x}{x!}\frac{(1-p)^{-\lambda/-p}}{(1-p)^x}
\end{aligned}
$$

Prueba del teorema

Primero recordamos la siguiente ley para el límite

Ley del producto para límites

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones y sea $c \in \mathbb{R}$.
Si tanto el límite $\lim_{x\to c} f(x)$ como el límite $\lim_{x\to c} g(x)$ existe, entonces

$$\lim_{x\to c} f(x)g(x) = \lim_{x\to c} f(x) \lim_{x\to c} g(x)$$

Análogamente, si los límites $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to\infty} g(x)$ existen, entonces

$$\lim_{x\to\infty} f(x)g(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) \lim_{x\to\infty} g(x)$$

Prueba del teorema

Tenemos que determinar el siguiente límite:

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ p\to 0}} f(x;n,p) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ p\to 0}} \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{x-1}{n}\right)\frac{\lambda^x}{x!}\frac{(1-p)^{-\lambda/-p}}{(1-p)^x}$$

Primero consideramos la parte que sólo involucra a n:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{x-1}{n}\right) = (1-0)(1-0)\dots(1-0) = 1$$

De la misma manera tenemos que

$$\lim_{p\to 0}(1-p)^x = (1-0)(1-0)\dots(1-0) = 1$$

Prueba del teorema

Ahora como $\lim_{\varepsilon\to 0}(1+\varepsilon)^{1/\varepsilon}=e$, entonces $\lim_{p\to 0}(1-p)^{-1/p}=e$

por lo que

$$\lim_{p\to 0}(1-p)^{-\lambda/-p}=\lim_{p\to 0}\left((1-p)^{-1/p}\right)^{-\lambda}=e^{-\lambda}$$

Por la ley del producto para el límite

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{n\to\infty \\ p\to 0}} f(x;n,p) &= \frac{\lambda^x}{x!}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{x-1}{n}\right)\frac{\lim_{p\to 0}(1-p)^{-\lambda/-p}}{\lim_{p\to 0}(1-p)^{x}} \\
&= \frac{\lambda^x}{x!}(1)\frac{e^{-\lambda}}{1} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}
\end{aligned}$$

Prueba del teorema

Solo falta considera los casos particulares $x = 0$ y $x = 1$.

$\mathbf{x = 0}$:

$$\begin{aligned} f(0;n,p) &= \frac{n!}{(n-0)!0!}p^0(1-p)^{n-0} = \frac{n!}{n!}1(1-p)^{np/p} \\ &= (1-p)^{\lambda/p} = \left((1-p)^{-1/p}\right)^{-\lambda} \end{aligned}$$

Como n no aparece en la expresión algebráica basta considerar el límite cuando $p \to 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{p\to 0} f(0;n,p) &= \lim_{p\to 0}\left((1-p)^{-1/p}\right)^{-\lambda} = e^{-\lambda} \\ &= \frac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!} \end{aligned}$$

Prueba del teorema

$\mathbf{x = 1}$:

$$
\begin{aligned}
f(1;n,p) &= \frac{n!}{(n-1)!1!}p^1(1-p)^{n-1} = np\frac{(1-p)^n}{(1-p)} \\
&= \lambda\frac{(1-p)^{np/p}}{(1-p)} = \lambda\frac{(1-p)^{\lambda/p}}{(1-p)} = \lambda\frac{\left((1-p)^{-1/p}\right)^{-\lambda}}{(1-p)}
\end{aligned}
$$

Como n no aparece en la expresión algebráica basta considerar el límite cuando $p \to 0$:

$$
\begin{aligned}
\lim_{p\to 0} f(1;n,p) &= \lambda\frac{\lim_{p\to 0}\left((1-p)^{-1/p}\right)^{-\lambda}}{\lim_{p\to 0}(1-p)} = \lambda\frac{e^{-\lambda}}{1} \\
&= \frac{e^{-\lambda}\lambda^1}{1!}
\end{aligned}
$$