Distribución Poisson

La distr Poisson fue descrita por Simón D Poisson (siglo XIX). Una v.a. es de **Poisson** si representa el número de eventos independientes de velocidad constante en un tiempo o espacio determinado.

Ejemplo

Los siguientes son v.a. de tipo Poisson:

1. *El número de personas que llegan al Oxxo.*
2. *El número de bacterias en un cultivo.*
3. *El número de bacterias en un mL.*
4. *El número de solicitudes procesados por una compañía.*
5. *El número de visitas en página de internet.*
6. *El número de errores en una página de un libro.*

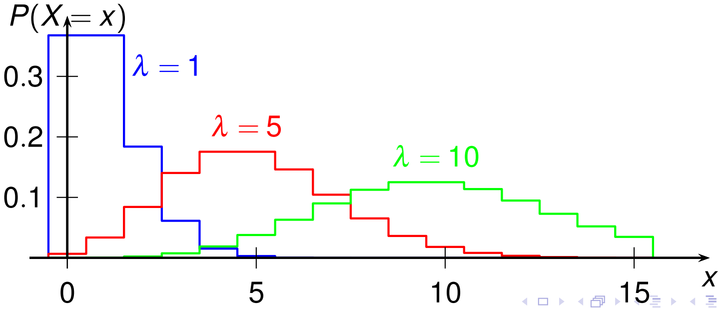
Se aplica a problemas de líneas de espera, además aproxima a la distribución binomial cuando la probabilidad p de éxito es pequeño y el número de ensayos n es grande.

Distribución Poisson

Sea X una v.a. que representa el número de eventos independientes que ocurren a una velocidad constante sobre el tiempo o espacio. La v.a. X tiene una **distribución de Poisson** con función de probabilidad:

$$P(X = x; \lambda) = f(x; \lambda) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} & x \geq 0,\ \lambda > 0 \\ 0 & e.o.c. \end{cases}$$

con λ como promedio de ocurrencia por unidad de tiempo o espacio.



Ejemplo 1

En una solución liquida hay en promedio 6 partículas (por ejemplo células de levadura) por mL. Se extrae 1 mL. ¿Cuál es la probabilidad de extraer exactamente 12 partículas?

La v.a. X mide el número de partículas extraídas en 1mL. El promedio de partículas por cada mL es $\lambda = 6$.

$$X \sim Poisson(6).$$

La función de probabilidad de X es

$$P(X = x; 6) = \frac{e^{-6}6^x}{x!}, \qquad x \geq 0$$

La probabilidad de extraer exactamente 12 partículas es

$$P(X = 12) = \frac{e^{-6}6^{12}}{12!} = 0.01126$$

Ejemplo 2

En una solución liquida hay en promedio 6 partículas (por ejemplo células de levadura) por mL. Se extraen 3 mL. ¿Cuál es la probabilidad de extraer exactamente 12 partículas?

La v.a. Y mide el número de partículas extraídas en 3mL. El promedio de partículas por cada 3 mL es $\lambda = (3)(6) = 18$.

$$Y \sim Poisson(18)$$

La función de probabilidad de Y es

$$P(Y = y; 18) = \frac{e^{-18} 18^{y}}{y!}, \qquad y \geq 0$$

La probabilidad de extraer exactamente 12 partículas es

$$P(Y = 12) = \frac{e^{-18} 18^{12}}{12!} = 0.03678$$

Ejemplo 3

Cierta página de internet tiene en promedio 5 visitas por minuto.
Si la v.a. X mide el número de visitas en t minutos,

¿cuál es la función de probabilidad de X en función de t?

El promedio de visitas a la página en t minutos es $\lambda = 5t$.

$$X \sim Poisson(5t)$$

La función de probabilidad de X es

$$P(X = x; 5t) = \frac{e^{-5t}(5t)^x}{x!}, \qquad x \geq 0$$

Distribución Poisson

La siguiente función es una función de probabilidad:

$$f(x;\lambda) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} & x \geq 0,\ \lambda > 0 \\ 0 & e.o.c. \end{cases}$$

Como $x \geq 0$, se sigue que

$$f(x;\lambda) \geq 0.$$

Como $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$, entonces

$$\sum_{x=0}^{\infty} f(x,\lambda) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = e^0 = 1.$$

Es decir,

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = 1.$$

La media de una distribución Poisson

Sea $X \sim Poisson(\lambda)$ la función de probabilidad de X es

$$P(X = x, \lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}, \quad x \geq 0,\ \lambda > 0.$$

La media de X es

$$\begin{aligned}
E[X] &= \sum_{x=0}^{\infty} x\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} &&= 0 + \sum_{x=1}^{\infty} \frac{xe^{-\lambda}\lambda^{x}}{x(x-1)!} \\
&= \sum_{x=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x-1}\lambda}{(x-1)!} &&= \lambda \sum_{x=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x-1}}{(x-1)!} \\
& \quad \text{sea } x' = x-1 && \\
&= \lambda \sum_{x'=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x'}}{x'!} &&= \lambda(1) = \lambda
\end{aligned}$$

La media de una distribución de Poisson X es $E[X] = \lambda$.

La varianza de una distribución Poisson

Primero calculamos el segundo momento al rededor de cero:

$$
\begin{aligned}
E[X(X-1)] &= \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1)\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} &&= 0+0+\sum_{x=2}^{\infty}\frac{x(x-1)e^{-\lambda}\lambda^x}{x(x-1)(x-2)!} \\
&= \sum_{x=2}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^2\lambda^{x-2}}{(x-2)!} &&= \lambda^2\sum_{x=2}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x-2}}{(x-2)!} \\
&\quad \text{sea } x' = x-2 \\
&= \lambda^2\sum_{x'=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x'}}{(x')!} &&= \lambda^2
\end{aligned}
$$

Como $\lambda^2 = E[X(X-1)] = E[X^2 - X] = E[X^2] - E[X] = \mu_2' - \mu$, entonces

$$\mu_2' = \lambda^2 + \mu = \lambda^2 + \lambda$$

y

$$Var(X) = E[X^2] - E^2[X] = \lambda^2 + \lambda - (\lambda^2) = \lambda.$$

Coef. de asimetría de una distribución Poisson

Calculamos el tercer momento al rededor del cero.

$$
\begin{aligned}
E[X(X-1)(X-2)] &= \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1)(x-2)\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \\
&= 0+0+0+\sum_{x=3}^{\infty} \frac{x(x-1)(x-2)e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x(x-1)(x-2)(x-3)!} \\
&= \sum_{x=3}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{3}\lambda^{x-3}}{(x-3)!} = \lambda^{3}\sum_{x=3}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x-3}}{(x-3)!} \\
& \quad sea\ x' = x-3 \\
&= \lambda^{3}\sum_{x'=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x'}}{(x')!} = \lambda^{3}(1) \\
E[X(X-1)(X-2)] &= \lambda^{3}.
\end{aligned}
$$

Coef. de asimetría de una distribución Poisson

Como

$$\lambda^3 = E[X(X-1)(X-2)] = \mu_3' - 3\mu_2' + 2\mu$$

y $\mu_2' = \lambda^2 + \lambda$, entonces

$$\mu_3' = \lambda^3 + 3(\lambda^2 + \lambda) - 2\lambda = \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda.$$

Como $\mu_3 = \mu_3' - 3\mu\mu_2' + 2\mu^3, \quad \mu = \lambda \quad$ y $\quad \mu_2 = \lambda$

$$\mu_3 = (\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda) - 3\lambda(\lambda^2 + \lambda) + 2\lambda^3 = \lambda.$$

El coeficiente de asimetría de la distribución Poisson es:

$$\alpha_3 = \frac{\lambda}{\lambda^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}.$$

El coeficiente de curtosis se deja como tarea.

Propiedades de una distribución Poisson

Función de probabilidad	Parámetros
$p(x;\lambda) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$ $x = 0, 1, 2, \ldots, n$	$\lambda > 0,$

Mediana μ	Varianza μ_2	Coeficiente de asimetría α_3	Coeficiente de curtosis α_4
λ	λ	$\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}$	$3 + \dfrac{1}{\lambda}$

Tanto el coeficiente de asimetría como el coeficiente de curtosis depende del valor de λ.

Coeficientes según λ

	$\lambda = 1/9$	$\lambda = 4$	$\lambda = 100$
$\alpha_3 = 1/\sqrt{\lambda}$	3	0.5	0.1
$\alpha_4 = 3 + 1/\lambda$	12	3.25	3.01

Poisson tiende a ser simétrica cuando λ tiende a infinito
en cualquier otro caso tiene una asimetría positivo.

Poisson tiende a ser mesocúrtica cuando λ tiende a infinito
en cualquier otro caso es relativamente picuda.

La f.g.m. de una distribución Poisson

La f.g.m. de una v.a. Poisson se determinó en la segunda sesión de la semana cuando se introdujo el concepto de f.g.m.

$$
\begin{aligned}
m_X(t) &= E\left[e^{tX}\right] = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{tx} e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{tx} \lambda^x}{x!} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(e^t \lambda)^x}{x!} = e^{-\lambda} \left(e^{\lambda e^t}\right) = e^{\lambda(e^t - 1)}
\end{aligned}
$$

Para encontrar $E[X]$ (el primer momento alrededor de cero) de X, derivamos la función generadora de momentos con respecto a t y evaluamos en $t = 0$.

$$
E[X] = \left.\frac{dm_X(t)}{dt}\right|_{t=0} = \left.\lambda e^t e^{\lambda(e^t - 1)}\right|_{t=0} = \lambda e^0 e^{\lambda(1-1)} = \lambda.
$$

La f.g.m. de una distribución Poisson

El segundo momento al rededor del cero (μ_2') es la segunda derivada con respecto a t, evaluada en $t = 0$:

$$\frac{d^2 m_x(t)}{dt^2} = e^{\lambda(e^t - 1)}(\lambda e^t)^2 + e^{\lambda(e^t-1)}\lambda e^t$$

$$E[X^2] = \left.\frac{d^2 m_x(t)}{dt^2}\right|_{t=0} = \lambda^2 + \lambda.$$

La varianza de la distribución Poisson:

$$Var(X) = E[X^2] - E^2[X] = (\lambda^2 + \lambda) - (\lambda)^2$$

En el caso de la distribución Poisson, igual que para la distribución binomial, resultó mas fácil usar la f.g.m. para determinar los momentos al rededor del cero que calcular estos momentos usando la definición en términos de la esperanza. **En general esto no sucede.**

Ejemplo 4

En la liga nacional del fútbol americano FNL juegan 28 equipos.
Sea X la v.a. del número de *touchdowns* de equipo por juego.
En el cuadro están los datos de la temporada 1979.

¿Hay razón para asumir que X tiene una distribución Poisson?

Número de anotaciones	Frecuencia	Frecuencia relativa	Probabilidad Poisson	Número esperado
0	35	0.0781	0.0876	39.24
1	99	0.2210	0.2133	95.56
2	104	0.2301	0.2597	116.34
3	110	0.2455	0.2108	94.44
4	62	0.1384	0.1283	57.48
5	25	0.0558	0.0625	28.00
6	10	0.0223	0.0254	11.38
7^*	3	0.0067	0.0124	5.56
Totales	448	0.9999	1.0000	448

Sea $\lambda = E[X] = 0(0.0781 + 1(0.2210) + \cdots + 7(0.0124) = 2.435$

Si $X \sim Poisson(2.435)$, entonces $P(X = x) \approx \dfrac{e^{-2.435}(2.435)^x}{x!}$

Ejemplo 5a

Una masa contiene 10 000 átomos radioactivos,
la probabilidad de que decaiga cierto átomo en un periodo de un minuto es 0.0002.
Sea X la v.a. que mide el número de átomos que decaigan (evento éxito) durante un minuto.
Cada evento es independiente a los demás,

$$X \sim Bin(10\,000, 0.0002).$$

La media de X es

$$\mu_X = (10\,000)(0.0002) = 2$$

$$P(X = 3) = \frac{10\,000!}{3!9\,997!}(0.0002)^3(0.9998)^{9997} = 0.180465$$

Ejemplo 5b

Una masa contiene 5 000 átomos radioactivos,
la probabilidad de que decaiga cierto átomo en un periodo de un minuto es 0.0004.
Sea Y la v.a. que mide el número de átomos que decaigan (evento éxito) durante un minuto.
Cada evento es independiente a los demás,

$$Y \sim Bin(5\,000, 0.0004).$$

La media de Y es

$$\mu_Y = (5\,000)(0.0004) = 2$$

$$P(Y = 3) = \frac{5\,000!}{3!4\,997!}(0.0004)^3(0.9996)^{4997} = 0.180483$$

Resumen de los ejemplos 5a y 5b

Las v.a. X y Y son Binomiales:

$$X \sim Bin(10\,000, 0.0002), \qquad Y \sim Bin(5\,000, 0.0004).$$

La medias de X y de Y son

$$\mu_X = (10\,000)(0.0002) = 2, \qquad \mu_Y = (5\,000)(0.0004) = 2$$

$$P(X = 3) = \frac{10\,000!}{3!9\,997!}(0.0002)^3(0.9998)^{9997} = 0.180465$$

$$P(Y = 3) = \frac{5\,000!}{3!4\,997!}(0.0004)^3(0.9996)^{4997} = 0.180483.$$

Sea Z una v.a. Poisson con $\lambda = 2$,

$$P(Z = 3) = \frac{e^{-2}2^3}{3!} = 0.180447.$$

Probaremos que si p es pequeño y n es grande, entonces

$$\frac{n!}{x!(n-x)!}p^x(1-p)^{n-x} \cong e^{-\lambda}\frac{\lambda}{x!} \qquad con\ \lambda = np$$

Ejemplo 6

Para estudiar si las ratas distinguen el color rojo, crearon una jaula con tres palancas, una palanca roja que al presionarla proporcionaba comida y otras dos palancas donde al presionarlas no pasaba nada.

En cada experimento la palanca de color rojo se colocaba de manera aleatoria y la rata sólo puede presionar una palanca.

Una misma rata realizó el experimento cuatro veces.

Sí la rato no distingue el color rojo, entonces va a elegir de manera aleatoria la palanca que presiona.

Define una v.a. X que permita determinar si la rata distingue el color rojo y determina su distribución de probabilidad.

Determina el valor esperado de X.

Solución del ejemplo 6

Sea X la v.a. que mide el número de veces que la rata consiguió comida. El rango de X es $\{0,1,2,3,4\}$.
La probabilidad de acertar es $1/3$. $X \sim Bin(n=4; p=1/3)$.
Sea R el evento de acertar y $\overline{R}$ el evento de fallo.

$$
\begin{array}{lrcl}
X=0: & & & \overline{R}\,\overline{R}\,\overline{R}\,\overline{R} \\
 & P(X=0) & = & \binom{4}{0}(1/3)^0(2/3)^4 = 16/81 \\[1em]
X=1: & & & R\overline{R}\,\overline{R}\,\overline{R} \cup \overline{R}R\overline{R}\,\overline{R} \cup \overline{R}\,\overline{R}R\overline{R} \cup \overline{R}\,\overline{R}\,\overline{R}R \\
 & P(X=1) & = & \binom{4}{1}(1/3)(2/3)^3 = 32/81 \\[1em]
X=2: & & & RR\overline{R}\,\overline{R} \cup R\overline{R}R\overline{R} \cup R\overline{RR}R \cup \overline{R}RR\overline{R} \cup \overline{R}R\overline{R}R \cup \overline{R}\,\overline{R}RR \\
 & P(X=2) & = & \binom{4}{2}(1/3)^2(2/3)^2 = 24/81 \\[1em]
X=3: & & & RRR\overline{R} \cup RR\overline{R}R \cup R\overline{R}RR \cup \overline{R}RRR \\
 & P(X=3) & = & \binom{4}{3}(1/3)^3(2/3) = 8/81 \\[1em]
X=4: & & & RRRR \\
 & P(X=4) & = & \binom{4}{1}(1/3)^4 = 1/81.
\end{array}
$$

Solución del ejemplo 6 cont.

Si las ratos no distinguen el color rojo, entonces el número de veces que una rata consigue comida es aleatoria y debe comportarse como la v.a. X cuya distribución es binomial

$$X \sim Bin(n = 4; p = 1/3)$$

.
El valor esperado de X es $E[X] = np = 4(1/3) = 4/3$.
La v.a. X nos permite determinar si la rata distingue el color rojo porque si se realiza el experimento con muchas ratas y el promedio es *considerablemente* mayor a $4/3$, entonces podemos asumir que la manera en que elige la palanca no es aleatoria.
En este caso las ratas eligen la palanca roja para obtener comida y podemos asumir que las ratas distinguen el color rojo. Aunque para hacer esta conclusión deben utilizar la técnica de *prueba de hipótesis* (Estadística 1).