Distribución discretas

La **distribución de probabilidad** de una variable aleatoria discreta v.a.d. esta conformado por todas las parejas

$$(x, P(X = x)) \; con \; x \in X.$$

Distribución discretas

La **distribución de probabilidad** de una variable aleatoria discreta v.a.d. esta conformado por todas las parejas

$$(x, P(X = x)) \; con \; x \in X.$$

La distribución de una v.a.d. es una distribución discreta.

Distribución discretas

La **distribución de probabilidad** de una variable aleatoria discreta v.a.d. esta conformado por todas las parejas

$$(x, P(X = x)) \; con \; x \in X.$$

La distribución de una v.a.d. es una distribución discreta.

Distribución Bernoulli

Una variable aleatoria discreta X tiene una **distribución Bernoulli** si únicamente puede tomar dos valores 1 y 0, digamos éxito y fallo respectivamente. Si la probabilidad de éxito es $0 < p < 1$, entonces

$$P(X = 1) = p \qquad P(X = 0) = 1 - p$$

Distribución discretas

La **distribución de probabilidad** de una variable aleatoria discreta v.a.d. esta conformado por todas las parejas

$$(x, P(X = x)) \; con \; x \in X.$$

La distribución de una v.a.d. es una distribución discreta.

Distribución Bernoulli

Una variable aleatoria discreta X tiene una **distribución Bernoulli** si únicamente puede tomar dos valores 1 y 0, digamos éxito y fallo respectivamente. Si la probabilidad de éxito es $0 < p < 1$, entonces

$$P(X = 1) = p \qquad P(X = 0) = 1 - p$$

Los resultados de un experimento tipo Bernoulli pueden ser éxito/fallo, bien/mal, si/no, rojo/azul, falso/verdadero, niña/niño, sol/águila etc.

Ejemplos de una distribución Bernoulli

Ejemplo 1

Considera el experimento de lanzar una moneda, y sea X la v.a. que le asigna el valor 0 si sale águila y le asigna el valor 1 si es sol.

Ejemplos de una distribución Bernoulli

Ejemplo 1

Considera el experimento de lanzar una moneda, y sea X la v.a. que le asigna el valor 0 si sale águila y le asigna el valor 1 si es sol. Entonces

$$\begin{aligned} P(X=1) &= 0.5 \\ P(X=0) &= 1-0.5 = 0.5. \end{aligned}$$

Ejemplo 2

Considera el experimento de lanzar un dado, y sea X la v.a. que le asigna el valor 0 si salen al menos 3 puntos y le asigna el valor 1 si salen menos de 3 puntos.

Ejemplos de una distribución Bernoulli

Ejemplo 1

Considera el experimento de lanzar una moneda, y sea X la v.a. que le asigna el valor 0 si sale águila y le asigna el valor 1 si es sol. Entonces

$$\begin{aligned} P(X=1) &= 0.5 \\ P(X=0) &= 1-0.5 = 0.5. \end{aligned}$$

Ejemplo 2

Considera el experimento de lanzar un dado, y sea X la v.a. que le asigna el valor 0 si salen al menos 3 puntos y le asigna el valor 1 si salen menos de 3 puntos. Entonces

$$\begin{aligned} P(X=1) &= 0.\overline{3} \\ P(X=0) &= 1-0.\overline{3} = 0.\overline{6}. \end{aligned}$$

Distribución Binomial

Cuando un experimento Bernoulli que se repite n veces (cada experimento tiene los mismos dos posibles resultados)

Distribución Binomial

Cuando un experimento Bernoulli que se repite n veces (cada experimento tiene los mismos dos posibles resultados) y el resultado de cada uno de los experimentos es independiente al resultado de los otros experimentos,

Distribución Binomial

Cuando un experimento Bernoulli que se repite n veces (cada experimento tiene los mismos dos posibles resultados) y el resultado de cada uno de los experimentos es independiente al resultado de los otros experimentos, decimos que la v.a. X que mide el número de "*éxitos*" tiene una **distribución binomial**.

Si el experimento se repite n veces y la probabilidad de *éxito* es p, entonces la probabilidad de que exactamente x de los n experimentos sean exitosos es:

$$f(x;p,n) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & x = 0, 1 \ldots, n, \; 0 < p < 1; \\ 0 & e.o.c. \end{cases}$$

Ejemplo 1

Lanzas una moneda 3 veces. Sea X la v.a. que mide el número de veces que sale sol. La probabilidad de un *éxito* es 0.5. ¿Cuál es la probabilidad de que salga sol una sola vez?

Ejemplo 1

Lanzas una moneda 3 veces. Sea X la v.a. que mide el número de veces que sale sol. La probabilidad de un *éxito* es 0.5. ¿Cuál es la probabilidad de que salga sol una sola vez?

Solución:
Sean A y S los eventos en que salió águila y sol resp.
Buscamos la probabilidad de q pase alguno de los siguientes:

Ejemplo 1

Lanzas una moneda 3 veces. Sea X la v.a. que mide el número de veces que sale sol. La probabilidad de un *éxito* es 0.5. ¿Cuál es la probabilidad de que salga sol una sola vez?

Solución:
Sean A y S los eventos en que salió águila y sol resp.
Buscamos la probabilidad de q pase alguno de los siguientes:

$$(A, A, S), (A, S, A), (S, A, A)$$

Ejemplo 1

Lanzas una moneda 3 veces. Sea X la v.a. que mide el número de veces que sale sol. La probabilidad de un *éxito* es 0.5. ¿Cuál es la probabilidad de que salga sol una sola vez?

Solución:

Sean A y S los eventos en que salió águila y sol resp.
Buscamos la probabilidad de q pase alguno de los siguientes:

$$(A, A, S), (A, S, A), (S, A, A)$$

$$P(X = 1) \quad =$$

Ejemplo 1

Lanzas una moneda 3 veces. Sea X la v.a. que mide el número de veces que sale sol. La probabilidad de un *éxito* es 0.5. ¿Cuál es la probabilidad de que salga sol una sola vez?

Solución:
Sean A y S los eventos en que salió águila y sol resp.
Buscamos la probabilidad de q pase alguno de los siguientes:

$$(A, A, S), (A, S, A), (S, A, A)$$

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= (0.5)(0.5)(0.5) + (0.5)(0.5)(0.5) + (0.5)(0.5)(0.5) \\ &= 3(0.5)^3 \; = \; 0.375. \end{aligned}$$

Ejemplo 1

Lanzas una moneda 3 veces. Sea X la v.a. que mide el número de veces que sale sol. La probabilidad de un *éxito* es 0.5. ¿Cuál es la probabilidad de que salga sol una sola vez?

Solución:
Sean A y S los eventos en que salió águila y sol resp.
Buscamos la probabilidad de q pase alguno de los siguientes:

$$(A, A, S), (A, S, A), (S, A, A)$$

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= (0.5)(0.5)(0.5) + (0.5)(0.5)(0.5) + (0.5)(0.5)(0.5) \\ &= 3(0.5)^3 \ = \ 0.375. \end{aligned}$$

La probabilidad de que salga sol en exactamente uno de los tres lanzamientos es $P(X = 1) = 0.375$.

Ejemplo 2

Lanzas un dado 3 veces. ¿Cuál es la probabilidad de que solo dos veces la suma de los puntos del dado sea a lo mas 4?

Ejemplo 2

Lanzas un dado 3 veces. ¿Cuál es la probabilidad de que solo dos veces la suma de los puntos del dado sea a lo mas 4?

Solución:

La v.a. X mide el número en las que la suma sea a lo mas 4 (*éxito* si la suma es $1, 2, 3$ *o* 4), la probabilidad de *éxito* es $2/3$.

Ejemplo 2

Lanzas un dado 3 veces. ¿Cuál es la probabilidad de que solo dos veces la suma de los puntos del dado sea a lo mas 4?

Solución:

La v.a. X mide el número en las que la suma sea a lo mas 4 (*éxito* si la suma es $1, 2, 3$ *o* 4), la probabilidad de *éxito* es $2/3$.Sea M el evento de una suma Mayor a 4 y m una suma menor o igual a 4. Los siguientes eventos son los que buscamos:

Ejemplo 2

Lanzas un dado 3 veces. ¿Cuál es la probabilidad de que solo dos veces la suma de los puntos del dado sea a lo mas 4?

Solución:

La v.a. X mide el número en las que la suma sea a lo mas 4 (*éxito* si la suma es $1, 2, 3$ *o* 4), la probabilidad de *éxito* es $2/3$.Sea M el evento de una suma Mayor a 4 y m una suma menor o igual a 4. Los siguientes eventos son los que buscamos:$(m, m, M), (m, M, m), (M, m, m)$.

$$P(X = 2) =$$

Ejemplo 2

Lanzas un dado 3 veces. ¿Cuál es la probabilidad de que solo dos veces la suma de los puntos del dado sea a lo mas 4?

Solución:

La v.a. X mide el número en las que la suma sea a lo mas 4 (*éxito* si la suma es $1, 2, 3$ *o* 4), la probabilidad de *éxito* es $2/3$.Sea M el evento de una suma Mayor a 4 y m una suma menor o igual a 4. Los siguientes eventos son los que buscamos:$(m, m, M), (m, M, m), (M, m, m)$.

$$\begin{aligned} P(X=2) &= \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right) \\ &= 3\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right) = 0.\overline{4}. \end{aligned}$$

Ejemplo 2

Lanzas un dado 3 veces. ¿Cuál es la probabilidad de que solo dos veces la suma de los puntos del dado sea a lo mas 4?

Solución:

La v.a. X mide el número en las que la suma sea a lo mas 4 (*éxito* si la suma es $1, 2, 3$ *o* 4), la probabilidad de *éxito* es $2/3$.Sea M el evento de una suma Mayor a 4 y m una suma menor o igual a 4. Los siguientes eventos son los que buscamos:$(m, m, M), (m, M, m), (M, m, m)$.

$$
\begin{aligned}
P(X=2) &= \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)\\
&= 3\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right) = 0.\overline{4}.
\end{aligned}
$$

La probabilidad de que la suma sea a lo mas 4 en solo dos de los tres lanzamientos es $P(X=2)=0.\overline{4}$.

Ejemplo 3

Durante los primeros trimestres llevaste un registro de los días en que falló tu internet.
Encontraste que 28% de los días falló tu internet.
Supón que esto no ha cambiado.
¿Cuál es la probabilidad de que falle tu internet a lo mas dos días durante una semana cualquiera?

Ejemplo 3

Durante los primeros trimestres llevaste un registro de los días en que falló tu internet.
Encontraste que 28% de los días falló tu internet.
Supón que esto no ha cambiado.
¿Cuál es la probabilidad de que falle tu internet a lo mas dos días durante una semana cualquiera?

Solución:
Una semana laboral tiene cinco días.
Cada día tienes dos posibilidades: el internet falla o no.

Ejemplo 3

Durante los primeros trimestres llevaste un registro de los días en que falló tu internet.
Encontraste que 28% de los días falló tu internet.
Supón que esto no ha cambiado.
¿Cuál es la probabilidad de que falle tu internet a lo mas dos días durante una semana cualquiera?

Solución:
Una semana laboral tiene cinco días.
Cada día tienes dos posibilidades: el internet falla o no.
Sea X la v.a. que mide el número de días que falla el internet.
Queremos que falle a lo mas dos días: cero veces, una vez o dos veces.

Ejemplo 3

Durante los primeros trimestres llevaste un registro de los días en que falló tu internet.
Encontraste que 28% de los días falló tu internet.
Supón que esto no ha cambiado.
¿Cuál es la probabilidad de que falle tu internet a lo mas dos días durante una semana cualquiera?

Solución:
Una semana laboral tiene cinco días.
Cada día tienes dos posibilidades: el internet falla o no.
Sea X la v.a. que mide el número de días que falla el internet.
Queremos que falle a lo mas dos días: cero veces, una vez o dos veces.
Sea F el evento de que falle el internet durante un día y N que no falle.
$n = 5$ (número de dás de clase por semana);
evento de éxito: F y $p = P(F) = 0.28$, $P(N) = 0.72$.

Solución del ejemplo 3 cont.

La probabilidad de que no falle ningún día de la semana:

$$P(X = 0) =$$

Solución del ejemplo 3 cont.

La probabilidad de que no falle ningún día de la semana:

$$P(X = 0) = (0.72)^5 = 0.1935.$$

La probabilidad de fallar un día determinado de la semana:

Solución del ejemplo 3 cont.

La probabilidad de que no falle ningún día de la semana:

$$P(X=0)=(0.72)^5=0.1935.$$

La probabilidad de fallar un día determinado de la semana: $(0.28)(0.72)^4=0.07525$.

Solución del ejemplo 3 cont.

La probabilidad de que no falle ningún día de la semana:

$$P(X = 0) = (0.72)^5 = 0.1935.$$

La probabilidad de fallar un día determinado de la semana:
$(0.28)(0.72)^4 = 0.07525.$
Hay 5 posibilidades de que falle un sólo día:

$$P(X = 1) =$$

Solución del ejemplo 3 cont.

La probabilidad de que no falle ningún día de la semana:

$$P(X=0)=(0.72)^5=0.1935.$$

La probabilidad de fallar un día determinado de la semana: $(0.28)(0.72)^4=0.07525.$
Hay 5 posibilidades de que falle un sólo día:

$$P(X=1)=5\cdot 0.28(0.72)^4=0.3762.$$

La probabilidad de fallar dos días determinados de la semana:

Solución del ejemplo 3 cont.

La probabilidad de que no falle ningún día de la semana:

$$P(X = 0) = (0.72)^5 = 0.1935.$$

La probabilidad de fallar un día determinado de la semana: $(0.28)(0.72)^4 = 0.07525.$
Hay 5 posibilidades de que falle un sólo día:

$$P(X = 1) = 5 \cdot 0.28(0.72)^4 = 0.3762.$$

La probabilidad de fallar dos días determinados de la semana: $(0.28)^2(0.72)^3 = 0.02926.$

Solución del ejemplo 3 cont.

La probabilidad de que no falle ningún día de la semana:

$$P(X = 0) = (0.72)^5 = 0.1935.$$

La probabilidad de fallar un día determinado de la semana:
$(0.28)(0.72)^4 = 0.07525$.
Hay 5 posibilidades de que falle un sólo día:

$$P(X = 1) = 5 \cdot 0.28(0.72)^4 = 0.3762.$$

La probabilidad de fallar dos días determinados de la semana:
$(0.28)^2(0.72)^3 = 0.02926$.
Hay $\binom{5}{2} = 10$ posibilidades para que falle dos días:

$$P(X = 2) =$$

Solución del ejemplo 3 cont.

La probabilidad de que no falle ningún día de la semana:

$$P(X=0)=(0.72)^5=0.1935.$$

La probabilidad de fallar un día determinado de la semana: $(0.28)(0.72)^4=0.07525.$
Hay 5 posibilidades de que falle un sólo día:

$$P(X=1)=5\cdot 0.28(0.72)^4=0.3762.$$

La probabilidad de fallar dos días determinados de la semana: $(0.28)^2(0.72)^3=0.02926.$
Hay $\binom{5}{2}=10$ posibilidades para que falle dos días:

$$P(X=2)=10(0.28)^2(0.72)^3=0.2926.$$

La probabilidad de fallar a lo mas dos días es

$P(X\leq 2)=$

Solución del ejemplo 3 cont.

La probabilidad de que no falle ningún día de la semana:

$$P(X=0)=(0.72)^5=0.1935.$$

La probabilidad de fallar un día determinado de la semana: $(0.28)(0.72)^4=0.07525.$
Hay 5 posibilidades de que falle un sólo día:

$$P(X=1)=5\cdot 0.28(0.72)^4=0.3762.$$

La probabilidad de fallar dos días determinados de la semana: $(0.28)^2(0.72)^3=0.02926.$
Hay $\binom{5}{2}=10$ posibilidades para que falle dos días:

$$P(X=2)=10(0.28)^2(0.72)^3=0.2926.$$

La probabilidad de fallar a lo mas dos días es

$$P(X\leq 2)=\binom{5}{0}(0.72)^5+\binom{5}{1}(0.28)(0.72)^4+\binom{5}{2}(0.28)^2(0.72)^3=0.86235.$$

Distribución Binomial

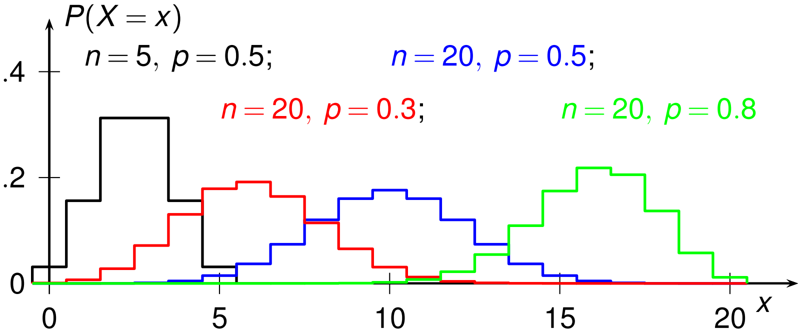
Una v.a. X que mide exactamente x *éxitos* de n experimentos independientes, cada experimento con probabilidad de *éxito* p tiene una **distribución binomial** con parámetros n y p.

Distribución Binomial

Una v.a. X que mide exactamente x *éxitos* de n experimentos independientes, cada experimento con probabilidad de *éxito* p tiene una **distribución binomial** con parámetros n y p.

La función de probabilidad de una distribución binomial es:

$$f(x;p,n) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & x = 0, 1 \ldots, n,\ 0 < p < 1; \\ 0 & e.o.c. \end{cases}$$



Ejemplo 4

Durante la fabricación de un producto se selecciona cada día aleatoriamente 15 unidades.
Si hay dos o mas defectuosas, se detiene la maquina.
La probabilidad de que una unidad sea defectuoso es 0.05.

Ejemplo 4

Durante la fabricación de un producto se selecciona cada día aleatoriamente 15 unidades.
Si hay dos o mas defectuosas, se detiene la maquina.
La probabilidad de que una unidad sea defectuoso es 0.05.
¿Cuál es la probabilidad de que se detiene la producción?
Solución:
Sea X la v.a. que mide el número de unidades defectuosas.

Ejemplo 4

Durante la fabricación de un producto se selecciona cada día aleatoriamente 15 unidades.
Si hay dos o mas defectuosas, se detiene la maquina.
La probabilidad de que una unidad sea defectuoso es 0.05.
¿Cuál es la probabilidad de que se detiene la producción?
Solución:
Sea X la v.a. que mide el número de unidades defectuosas.
Queremos determinar $P(X \geq 2)$.
$n = 15$; $p = 0.05$; $x = 0, 2, \ldots, 15$ Por la propiedad del complemento tenemos que

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1))$$

Ejemplo 4

Durante la fabricación de un producto se selecciona cada día aleatoriamente 15 unidades.
Si hay dos o mas defectuosas, se detiene la maquina.
La probabilidad de que una unidad sea defectuoso es 0.05.
¿Cuál es la probabilidad de que se detiene la producción?
Solución:
Sea X la v.a. que mide el número de unidades defectuosas.
Queremos determinar $P(X \geq 2)$.
$n = 15$; $p = 0.05$; $x = 0, 2, \ldots, 15$ Por la propiedad del complemento tenemos que

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1))$$

$$P(X = 0) \quad =$$

Ejemplo 4

Durante la fabricación de un producto se selecciona cada día aleatoriamente 15 unidades.
Si hay dos o mas defectuosas, se detiene la maquina.
La probabilidad de que una unidad sea defectuoso es 0.05.
¿Cuál es la probabilidad de que se detiene la producción?
Solución:
Sea X la v.a. que mide el número de unidades defectuosas.
Queremos determinar $P(X \geq 2)$.
$n = 15$; $p = 0.05$; $x = 0, 2, \ldots, 15$ Por la propiedad del complemento tenemos que

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1))$$

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= \binom{15}{0}(0.95^{15}) = 0.4632 \\ P(X = 1) &= \end{aligned}$$

Ejemplo 4

Durante la fabricación de un producto se selecciona cada día aleatoriamente 15 unidades.
Si hay dos o mas defectuosas, se detiene la maquina.
La probabilidad de que una unidad sea defectuoso es 0.05.
¿Cuál es la probabilidad de que se detiene la producción?
Solución:
Sea X la v.a. que mide el número de unidades defectuosas.
Queremos determinar $P(X \geq 2)$.
$n = 15$; $p = 0.05$; $x = 0, 2, \ldots, 15$ Por la propiedad del complemento tenemos que

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1))$$

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= \binom{15}{0}(0.95^{15}) = 0.4632 \\ P(X = 1) &= \binom{15}{1}(0.05)(0.95^{14}) = 0.3657 \\ P(X \geq 2) &= \end{aligned}$$

Ejemplo 4

Durante la fabricación de un producto se selecciona cada día aleatoriamente 15 unidades.
Si hay dos o mas defectuosas, se detiene la maquina.
La probabilidad de que una unidad sea defectuoso es 0.05.
¿Cuál es la probabilidad de que se detiene la producción?
Solución:
Sea X la v.a. que mide el número de unidades defectuosas.
Queremos determinar $P(X \geq 2)$.
$n = 15$; $p = 0.05$; $x = 0, 2, \ldots, 15$ Por la propiedad del complemento tenemos que

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1))$$

$$\begin{aligned}
P(X = 0) &= \binom{15}{0}(0.95^{15}) = 0.4632 \\
P(X = 1) &= \binom{15}{1}(0.05)(0.95^{14}) = 0.3657 \\
P(X \geq 2) &= 1 - (0.8289) \\
&= 0.1711.
\end{aligned}$$

La media de una distribución binomial

La función de probabilidad de una distribución binomial es

$$f(x;p,n) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i},\ x = 0, 1 \ldots, n,\ 0 < p < 1.$$

$$E[X] \quad =$$

La media de una distribución binomial

La función de probabilidad de una distribución binomial es

$$f(x;p,n) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i},\ x = 0, 1 \ldots, n,\ 0 < p < 1.$$

$$\begin{aligned}
E[X] &= \textstyle\sum_{x=0}^{n} x \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \\
&= \textstyle\sum_{x=0}^{n} x \frac{n!}{(n-x)!x!} p^x (1-p)^{n-x} \\
&= 0 + \textstyle\sum_{x=1}^{n} \frac{n(n-1)!}{(n-x)!(x-1)!} p p^{x-1} (1-p)^{n-x}
\end{aligned}$$

$$n - x = (n-1) - (x-1)$$

La media de una distribución binomial

La función de probabilidad de una distribución binomial es

$$f(x;p,n) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i},\ x = 0, 1 \ldots, n,\ 0 < p < 1.$$

$$\begin{aligned}
E[X] &= \textstyle\sum_{x=0}^{n} x \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \\
&= \textstyle\sum_{x=0}^{n} x \frac{n!}{(n-x)!x!} p^x (1-p)^{n-x} \\
&= 0 + \textstyle\sum_{x=1}^{n} \frac{n(n-1)!}{(n-x)!(x-1)!} p p^{x-1} (1-p)^{n-x} \\
& \quad n - x \ = \ (n-1) - (x-1) \\
&= np \textstyle\sum_{x=1}^{n} \frac{(n-1)!}{((n-1)-(x-1))!(x-1)!} p^{x-1} (1-p)^{(n-1)-(x-1)} \\
& \quad x' \ = \ x - 1 \quad y \quad n' \ = \ n - 1
\end{aligned}$$

La media de una distribución binomial

La función de probabilidad de una distribución binomial es

$$f(x;p,n) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i},\ x = 0, 1\ldots, n,\ 0 < p < 1.$$

$$\begin{aligned}
E[X] &= \textstyle\sum_{x=0}^{n} x \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \\
&= \textstyle\sum_{x=0}^{n} x \frac{n!}{(n-x)!x!} p^x (1-p)^{n-x} \\
&= 0 + \textstyle\sum_{x=1}^{n} \frac{n(n-1)!}{(n-x)!(x-1)!} p p^{x-1} (1-p)^{n-x} \\
& \quad n - x \ = \ (n-1) - (x-1) \\
&= np \textstyle\sum_{x=1}^{n} \frac{(n-1)!}{((n-1)-(x-1))!(x-1)!} p^{x-1} (1-p)^{(n-1)-(x-1)} \\
& \quad x' \ = \ x - 1 \quad y \quad n' \ = \ n - 1 \\
&= np \textstyle\sum_{x'=0}^{n} \frac{(n')!}{(n'-x')!(x')!} p^{x'} (1-p)^{n'-x')} \\
&= np \textstyle\sum_{x'=0}^{n'} \binom{n'}{x'} p^{x'} (1-p)^{n'-x'} \\
&= np.
\end{aligned}$$

La media de una distribución binomial

La función de probabilidad de una distribución binomial es

$$f(x;p,n) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i},\ x = 0, 1 \dots, n,\ 0 < p < 1.$$

$$\begin{aligned}
E[X] &= \textstyle\sum_{x=0}^{n} x \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \\
&= \textstyle\sum_{x=0}^{n} x \frac{n!}{(n-x)!x!} p^x (1-p)^{n-x} \\
&= 0 + \textstyle\sum_{x=1}^{n} \frac{n(n-1)!}{(n-x)!(x-1)!} p p^{x-1} (1-p)^{n-x} \\
& \quad n - x \ = \ (n-1) - (x-1) \\
&= np \textstyle\sum_{x=1}^{n} \frac{(n-1)!}{((n-1)-(x-1))!(x-1)!} p^{x-1} (1-p)^{(n-1)-(x-1)} \\
& \quad x' \ = \ x - 1 \quad y \quad n' \ = \ n - 1 \\
&= np \textstyle\sum_{x'=0}^{n} \frac{(n')!}{(n'-x')!(x')!} p^{x'} (1-p)^{n'-x')} \\
&= np \textstyle\sum_{x'=0}^{n'} \binom{n'}{x'} p^{x'} (1-p)^{n'-x'} \\
&= np.
\end{aligned}$$

Por lo que $\mu = np$.

La varianzade una distribución binomial

Para calcular el segundo momento al rededor del cero:

$$E[X(X-1)] =$$

La varianzade una distribución binomial

Para calcular el segundo momento al rededor del cero:

$$\begin{aligned}
E[X(X-1)] &= \textstyle\sum_{x=0}^{n} x(x-1)\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x} \\
&= 0+0+\textstyle\sum_{x=2}^{n} x(x-1)\dfrac{n!}{(n-x)!x!}p^x(1-p)^{n-x} \\
&= \textstyle\sum_{x=2}^{n} \dfrac{x(x-1)n!}{(n-x)!x(x-1)(x-2)!}p^x(1-p)^{n-x} \\
&= \textstyle\sum_{x=2}^{n} \dfrac{n(n-1)(n-2)!}{(n-x)!(x-2)!}p^2p^{x-2}(1-p)^{n-x}
\end{aligned}$$

$$n-x = (n-2)-(x-2)$$

La varianzade una distribución binomial

Para calcular el segundo momento al rededor del cero:

$$
\begin{aligned}
E[X(X-1)] &= \textstyle\sum_{x=0}^{n} x(x-1)\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \\
&= 0+0+\textstyle\sum_{x=2}^{n} x(x-1)\dfrac{n!}{(n-x)!x!} p^x (1-p)^{n-x} \\
&= \textstyle\sum_{x=2}^{n} \dfrac{x(x-1)n!}{(n-x)!x(x-1)(x-2)!} p^x (1-p)^{n-x} \\
&= \textstyle\sum_{x=2}^{n} \dfrac{n(n-1)(n-2)!}{(n-x)!(x-2)!} p^2 p^{x-2} (1-p)^{n-x}
\end{aligned}
$$

$$n-x = (n-2)-(x-2)$$

$$= p^2 \textstyle\sum_{x=2}^{n} \dfrac{n(n-1)(n-2)!}{((n-2)-(x-2))!(x-2)!} p^{x-2} (1-p)^{(n-2)-(x-2)}$$

$$x' = x-2 \quad y \quad n' = n-2$$

La varianzade una distribución binomial

Para calcular el segundo momento al rededor del cero:

$$
\begin{aligned}
E[X(X-1)] &= \textstyle\sum_{x=0}^{n} x(x-1)\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \\
&= 0+0+\textstyle\sum_{x=2}^{n} x(x-1)\dfrac{n!}{(n-x)!x!} p^x (1-p)^{n-x} \\
&= \textstyle\sum_{x=2}^{n} \dfrac{x(x-1)n!}{(n-x)!x(x-1)(x-2)!} p^x (1-p)^{n-x} \\
&= \textstyle\sum_{x=2}^{n} \dfrac{n(n-1)(n-2)!}{(n-x)!(x-2)!} p^2 p^{x-2} (1-p)^{n-x} \\
& \quad n-x \; = \; (n-2)-(x-2) \\
&= p^2 \textstyle\sum_{x=2}^{n} \dfrac{n(n-1)(n-2)!}{((n-2)-(x-2))!(x-2)!} p^{x-2} (1-p)^{(n-2)-(x-2)} \\
& \quad x' \; = \; x-2 \quad y \quad n' \; = \; n-2 \\
&= n(n-1)p^2 \textstyle\sum_{x'=0}^{n'} \binom{n'}{x'} p^{x'} (1-p)^{n'-x'} \\
E[X(X-1)] &= n(n-1)p^2.
\end{aligned}
$$

La varianzade una distribución binomialcont.

Determinamos que

$$E[X(X-1)] = n(n-1)p^2.$$

Como

$$E[X(X-1)] = E[X^2 - X] = E[X^2] - E[X] = \mu_2' - \mu,$$

entonces

$$\mu_2'$$

La varianzade una distribución binomialcont.

Determinamos que

$$E[X(X-1)] = n(n-1)p^2.$$

Como

$$E[X(X-1)] = E[X^2 - X] = E[X^2] - E[X] = \mu_2' - \mu,$$

entonces

$$\mu_2' = n(n-1)p^2 + \mu = n(n-1)p^2 + np$$

y

$$\mu_2 =$$

La varianzade una distribución binomialcont.

Determinamos que

$$E[X(X-1)] = n(n-1)p^2.$$

Como

$$E[X(X-1)] = E[X^2 - X] = E[X^2] - E[X] = \mu_2' - \mu,$$

entonces

$$\mu_2' = n(n-1)p^2 + \mu = n(n-1)p^2 + np$$

y

$$\mu_2 = \mu_2' - \mu^2 = (np)^2 - np^2 + np - (np)^2 = np(1-p).$$

La varianzade una distribución binomialcont.

Determinamos que

$$E[X(X-1)] = n(n-1)p^2.$$

Como

$$E[X(X-1)] = E[X^2 - X] = E[X^2] - E[X] = \mu_2' - \mu,$$

entonces

$$\mu_2' = n(n-1)p^2 + \mu = n(n-1)p^2 + np$$

y

$$\mu_2 = \mu_2' - \mu^2 = (np)^2 - np^2 + np - (np)^2 = np(1-p).$$

Por lo tanto

$$Var(X) = \mu_2 = np(1-p)$$

Ejemplo 5

En una producción se toma una muestra de 1000 productos. Un producto es defectuoso con probabilidad 0.01.

Ejemplo 5

En una producción se toma una muestra de 1000 productos.
Un producto es defectuoso con probabilidad 0.01.
¿Cuántos defectuosos pueden esperar encontrar en la muestra?
¿Cuál es la varianza y la desviación estandar ?

Ejemplo 5

En una producción se toma una muestra de 1000 productos.
Un producto es defectuoso con probabilidad 0.01.
¿Cuántos defectuosos pueden esperar encontrar en la muestra?
¿Cuál es la varianza y la desviación estandar ?

Solución:
Sea X la v.a. de una distribución binomial con parámetros

$$n = 1000 \quad y \quad p = 0.01.$$

Ejemplo 5

En una producción se toma una muestra de 1000 productos. Un producto es defectuoso con probabilidad 0.01.
¿Cuántos defectuosos pueden esperar encontrar en la muestra?
¿Cuál es la varianza y la desviación estandar ?

Solución:
Sea X la v.a. de una distribución binomial con parámetros

$$n = 1000 \quad y \quad p = 0.01.$$

$E[X] = np = 1000(0.01) = 10,$

Ejemplo 5

En una producción se toma una muestra de 1000 productos.
Un producto es defectuoso con probabilidad 0.01.
¿Cuántos defectuosos pueden esperar encontrar en la muestra?
¿Cuál es la varianza y la desviación estandar ?

Solución:
Sea X la v.a. de una distribución binomial con parámetros

$$n = 1000 \quad y \quad p = 0.01.$$

$$E[X] = np = 1000(0.01) = 10,$$

$$Var(X) = np(1-p) = 1000(0.01)(0.99) = 9.9,$$

Ejemplo 5

En una producción se toma una muestra de 1000 productos.
Un producto es defectuoso con probabilidad 0.01.
¿Cuántos defectuosos pueden esperar encontrar en la muestra?
¿Cuál es la varianza y la desviación estandar ?

Solución:
Sea X la v.a. de una distribución binomial con parámetros

$$n = 1000 \quad y \quad p = 0.01.$$

$$E[X] = np = 1000(0.01) = 10,$$

$$Var(X) = np(1-p) = 1000(0.01)(0.99) = 9.9,$$

$$\sigma(X) = \sqrt{9.9} = 3.1464.$$

Coeficiente de asimetría de distribución binomial

Para calcular el tercer momento al rededor del cero:

$$E[X(X-1)(X-2)] \quad =$$

Coeficiente de asimetría de distribución binomial

Para calcular el tercer momento al rededor del cero:

$$
\begin{aligned}
E[X(X-1)(X-2)] &= \textstyle\sum_{x=0}^{n} x(x-1)\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x} \\
&= 0+0+0+\textstyle\sum_{x=3}^{n} x(x-1)(x-2)\dfrac{n!}{(n-x)!x!}p^x(1-p)^{n-x} \\
&= \textstyle\sum_{x=3}^{n} \dfrac{x(x-1)(x-2)n!}{(n-x)!x(x-1)(x-2)(x-3)!}p^x(1-p)^{n-x} \\
&= \textstyle\sum_{x=3}^{n} \dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-x)!(x-3)!}p^3p^{x-3}(1-p)^{n-x}
\end{aligned}
$$

$$n-x = (n-3)-(x-3)$$

Coeficiente de asimetría de distribución binomial

Para calcular el tercer momento al rededor del cero:

$$
\begin{aligned}
E[X(X-1)(X-2)] &= \textstyle\sum_{x=0}^{n} x(x-1)\binom{n}{x} p^x(1-p)^{n-x} \\
&= 0+0+0+\textstyle\sum_{x=3}^{n} x(x-1)(x-2)\dfrac{n!}{(n-x)!x!} p^x(1-p)^{n-x} \\
&= \textstyle\sum_{x=3}^{n} \dfrac{x(x-1)(x-2)n!}{(n-x)!x(x-1)(x-2)(x-3)!} p^x(1-p)^{n-x} \\
&= \textstyle\sum_{x=3}^{n} \dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-x)!(x-3)!} p^3 p^{x-3}(1-p)^{n-x}
\end{aligned}
$$

$$n-x \;=\; (n-3)-(x-3)$$

$$= \quad p^3 \sum_{x=3}^{n} \tfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{((n-3)-(x-3))!(x-3)!} p^{x-3}(1-p)^{(n-3)-(x-3)}$$

$$x' \;=\; x-3 \quad y \quad n' \;=\; n-3$$

Coeficiente de asimetría de distribución binomial

Para calcular el tercer momento al rededor del cero:

$$
\begin{aligned}
E[X(X-1)(X-2)] &= \textstyle\sum_{x=0}^{n} x(x-1)\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x} \\
&= 0+0+0+\textstyle\sum_{x=3}^{n} x(x-1)(x-2)\dfrac{n!}{(n-x)!x!}p^x(1-p)^{n-x} \\
&= \textstyle\sum_{x=3}^{n} \dfrac{x(x-1)(x-2)n!}{(n-x)!x(x-1)(x-2)(x-3)!}p^x(1-p)^{n-x} \\
&= \textstyle\sum_{x=3}^{n} \dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-x)!(x-3)!}p^3p^{x-3}(1-p)^{n-x} \\
& \quad n-x = (n-3)-(x-3) \\
&= p^3\sum_{x=3}^{n} \tfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{((n-3)-(x-3))!(x-3)!}p^{x-3}(1-p)^{(n-3)-(x-3)} \\
& \quad x' = x-3 \quad y \quad n' = n-3 \\
&= n(n-1)(n-2)p^3\textstyle\sum_{x'=0}^{n'} \binom{n'}{x'}p^{x'}(1-p)^{n'-x'} \\
E[X(X-1)(X-2)] &= n(n-1)(n-2)p^3.
\end{aligned}
$$

Coeficiente de asimetría de distribución binomial

Como $\mu_2' = n(n-1)p^2 + np$, $E[X(X-1)(X-2)] = n(n-1)(n-2)p^3$ y

$$E[X(X-1)(X-2)] = E[X^3 - 3X^2 + 2X] = \mu_3' - 3\mu_2' + 2\mu$$

Entonces

$$\mu_3' =$$

Coeficiente de asimetría de distribución binomial

Como $\mu_2' = n(n-1)p^2 + np$, $E[X(X-1)(X-2)] = n(n-1)(n-2)p^3$ y

$$E[X(X-1)(X-2)] = E[X^3 - 3X^2 + 2X] = \mu_3' - 3\mu_2' + 2\mu$$

Entonces

$$\begin{aligned} \mu_3' &= n(n-1)(n-2)p^3 + 3(n(n-1)p^2 + np) - 2np \\ &= n(n-1)(n-2)p^3 + 3n(n-1)p^2 + np. \end{aligned}$$

Coeficiente de asimetría de distribución binomial

Como $\mu_2' = n(n-1)p^2 + np$, $E[X(X-1)(X-2)] = n(n-1)(n-2)p^3$ y

$$E[X(X-1)(X-2)] = E[X^3 - 3X^2 + 2X] = \mu_3' - 3\mu_2' + 2\mu$$

Entonces

$$\begin{aligned} \mu_3' &= n(n-1)(n-2)p^3 + 3(n(n-1)p^2 + np) - 2np \\ &= n(n-1)(n-2)p^3 + 3n(n-1)p^2 + np. \end{aligned}$$

Como $\mu_3 = \mu_3' - 3\mu\mu_2' + 2\mu^3$, $\mu = np$ y $\mu_2 = np(1-p)$

$$\mu_3 =$$

Coeficiente de asimetría de distribución binomial

Como $\mu_2' = n(n-1)p^2 + np$, $E[X(X-1)(X-2)] = n(n-1)(n-2)p^3$ y

$$E[X(X-1)(X-2)] = E[X^3 - 3X^2 + 2X] = \mu_3' - 3\mu_2' + 2\mu$$

Entonces

$$\begin{aligned} \mu_3' &= n(n-1)(n-2)p^3 + 3(n(n-1)p^2 + np) - 2np \\ &= n(n-1)(n-2)p^3 + 3n(n-1)p^2 + np. \end{aligned}$$

Como $\mu_3 = \mu_3' - 3\mu\mu_2' + 2\mu^3$, $\mu = np$ y $\mu_2 = np(1-p)$

$$\begin{aligned} \mu_3 &= n(n-1)(n-2)p^3 + 3n(n-1)p^2 + np - 3np(n(n-1)p^2 + np) + 2(np)^3 \\ &= np(1-p)(1-2p). \end{aligned}$$

Coeficiente de asimetría de distribución binomial

Como $\mu_2' = n(n-1)p^2 + np$, $E[X(X-1)(X-2)] = n(n-1)(n-2)p^3$ y

$$E[X(X-1)(X-2)] = E[X^3 - 3X^2 + 2X] = \mu_3' - 3\mu_2' + 2\mu$$

Entonces

$$\begin{aligned} \mu_3' &= n(n-1)(n-2)p^3 + 3(n(n-1)p^2 + np) - 2np \\ &= n(n-1)(n-2)p^3 + 3n(n-1)p^2 + np. \end{aligned}$$

Como $\mu_3 = \mu_3' - 3\mu\mu_2' + 2\mu^3$, $\mu = np$ y $\mu_2 = np(1-p)$

$$\begin{aligned} \mu_3 &= n(n-1)(n-2)p^3 + 3n(n-1)p^2 + np - 3np(n(n-1)p^2 + np) + 2(np)^3 \\ &= np(1-p)(1-2p). \end{aligned}$$

El coeficiente de asimetría de la distribución binomial es:

$$\alpha_3 =$$

Coeficiente de asimetría de distribución binomial

Como $\mu_2' = n(n-1)p^2 + np$, $E[X(X-1)(X-2)] = n(n-1)(n-2)p^3$ y

$$E[X(X-1)(X-2)] = E[X^3 - 3X^2 + 2X] = \mu_3' - 3\mu_2' + 2\mu$$

Entonces

$$\begin{aligned} \mu_3' &= n(n-1)(n-2)p^3 + 3(n(n-1)p^2 + np) - 2np \\ &= n(n-1)(n-2)p^3 + 3n(n-1)p^2 + np. \end{aligned}$$

Como $\mu_3 = \mu_3' - 3\mu\mu_2' + 2\mu^3$, $\mu = np$ y $\mu_2 = np(1-p)$

$$\begin{aligned} \mu_3 &= n(n-1)(n-2)p^3 + 3n(n-1)p^2 + np - 3np(n(n-1)p^2 + np) + 2(np)^3 \\ &= np(1-p)(1-2p). \end{aligned}$$

El coeficiente de asimetría de la distribución binomial es:

$$\alpha_3 = \frac{np(1-p)(1-2p)}{(np(1-p))^{3/2}} = \frac{np(1-p)(1-2p)}{np(1-p)(np(1-p))^{1/2}} = \frac{(1-2p)}{(np(1-p))^{1/2}}.$$

Coeficiente de curtosis de una distribución binomial

Para calcular el tercer momento al rededor del cero:

$$E[X(X-1)...(X-3)] \quad =$$

Coeficiente de curtosis de una distribución binomial

Para calcular el tercer momento al rededor del cero:

$$
\begin{aligned}
E[X(X-1)...(X-3)] &= \textstyle\sum_{x=0}^{n} x(x-1)\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \\
&= 0+0+0+0+\sum_{x=4}^{n} \tfrac{x(x-1)(x-2)(x-3)n!}{(n-x)!x!} p^x (1-p)^{n-x} \\
&= \sum_{x=4}^{n} \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)n!}{(n-x)!x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)!} p^x (1-p)^{n-x} \\
&= \sum_{x=4}^{n} \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)!}{(n-x)!(x-4)!} p^4 p^{x-4} (1-p)^{n-x}
\end{aligned}
$$

$$n-x = (n-4)-(x-4)$$

Coeficiente de curtosis de una distribución binomial

Para calcular el tercer momento al rededor del cero:

$$
\begin{aligned}
E[X(X-1)...(X-3)] &= \textstyle\sum_{x=0}^{n} x(x-1)\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x} \\
&= 0+0+0+0+\sum_{x=4}^{n}\tfrac{x(x-1)(x-2)(x-3)n!}{(n-x)!x!}p^x(1-p)^{n-x} \\
&= \sum_{x=4}^{n}\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)n!}{(n-x)!x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)!}p^x(1-p)^{n-x} \\
&= \sum_{x=4}^{n}\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)!}{(n-x)!(x-4)!}p^4p^{x-4}(1-p)^{n-x}
\end{aligned}
$$

$$n-x = (n-4)-(x-4)$$

$$= p^4\sum_{x=4}^{n}\tfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)!}{((n-4)-(x-4))!(x-4)!}p^{x-4}(1-p)^{(n-4)-(x-4)}$$

$$x' = x-4 \quad y \quad n' = n-4$$

Coeficiente de curtosis de una distribución binomial

Para calcular el tercer momento al rededor del cero:

$$
\begin{aligned}
E[X(X-1)...(X-3)] &= \textstyle\sum_{x=0}^{n} x(x-1)\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x} \\
&= 0+0+0+0+\sum_{x=4}^{n}\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)n!}{(n-x)!x!}p^x(1-p)^{n-x} \\
&= \sum_{x=4}^{n}\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)n!}{(n-x)!x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)!}p^x(1-p)^{n-x} \\
&= \sum_{x=4}^{n}\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)!}{(n-x)!(x-4)!}p^4p^{x-4}(1-p)^{n-x} \\
& n-x \;=\; (n-4)-(x-4) \\
&= p^4\sum_{x=4}^{n}\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)!}{((n-4)-(x-4))!(x-4)!}p^{x-4}(1-p)^{(n-4)-(x-4)} \\
& x' \;=\; x-4 \quad y \quad n' \;=\; n-4 \\
&= n(n-1)(n-2)(n-3)p^4\textstyle\sum_{x'=0}^{n'}\binom{n'}{x'}p^{x'}(1-p)^{n'-x'} \\
E[X(X-1)...(X-3)] &= n(n-1)(n-3)(n-3)p^4.
\end{aligned}
$$

Coeficiente de curtosis de una distribución binomial

$\mu_2' = n(n-1)p^2 + np$, $\mu_3' = n(n-1)(n-2)p^3 + 3n(n-1)p^2 + np$,
$E[X(X-1)...(X-3)] = n(n-1)(n-3)(n-3)p^4$ y
$E[X(X-1)...(X-3)] = \mu_4' - 6\mu_3' + 11\mu_2' - 6\mu$,

Coeficiente de curtosis de una distribución binomial

$\mu_2' = n(n-1)p^2 + np$, $\mu_3' = n(n-1)(n-2)p^3 + 3n(n-1)p^2 + np$,
$E[X(X-1)...(X-3)] = n(n-1)(n-3)(n-3)p^4$ y
$E[X(X-1)...(X-3)] = \mu_4' - 6\mu_3' + 11\mu_2' - 6\mu$,
entonces

$$\mu_4' \quad =$$

Coeficiente de curtosis de una distribución binomial

$\mu_2' = n(n-1)p^2 + np$, $\mu_3' = n(n-1)(n-2)p^3 + 3n(n-1)p^2 + np$,
$E[X(X-1)...(X-3)] = n(n-1)(n-3)(n-3)p^4$ y
$E[X(X-1)...(X-3)] = \mu_4' - 6\mu_3' + 11\mu_2' - 6\mu$,
entonces

$$\begin{aligned}
\mu_4' &= n(n-1)(n-2)(n-3)p^4 + 6\mu_3' - 11\mu_2' + 6\mu \\
&= n(n-1)(n-2)(n-3)p^4 + 6[n(n-1)(n-2)p^3 + 3n(n-1)p^2 + np] \\
&\quad -11[n(n-1)p^2 + np] + 6np
\end{aligned}$$

Coeficiente de curtosis de una distribución binomial

$\mu_2' = n(n-1)p^2 + np$, $\mu_3' = n(n-1)(n-2)p^3 + 3n(n-1)p^2 + np$,
$E[X(X-1)...(X-3)] = n(n-1)(n-3)(n-3)p^4$ y
$E[X(X-1)...(X-3)] = \mu_4' - 6\mu_3' + 11\mu_2' - 6\mu$,
entonces

$$\begin{aligned} \mu_4' &= n(n-1)(n-2)(n-3)p^4 + 6\mu_3' - 11\mu_2' + 6\mu \\ &= n(n-1)(n-2)(n-3)p^4 + 6[n(n-1)(n-2)p^3 + 3n(n-1)p^2 + np] \\ &\quad -11[n(n-1)p^2 + np] + 6np \end{aligned}$$

Como $\mu_4 = \mu_4' - 4\mu\mu_3' + 6\mu^2\mu_2' - 3\mu^4$

$$\mu_4 = np(1-p)\{3np(1-p) + [1 - 6p(1-p)]\}.$$

Coeficiente de curtosis de una distribución binomial

$\mu_2' = n(n-1)p^2 + np$, $\mu_3' = n(n-1)(n-2)p^3 + 3n(n-1)p^2 + np$,
$E[X(X-1)...(X-3)] = n(n-1)(n-3)(n-3)p^4$ y
$E[X(X-1)...(X-3)] = \mu_4' - 6\mu_3' + 11\mu_2' - 6\mu$,
entonces

$$\begin{aligned}
\mu_4' &= n(n-1)(n-2)(n-3)p^4 + 6\mu_3' - 11\mu_2' + 6\mu \\
&= n(n-1)(n-2)(n-3)p^4 + 6[n(n-1)(n-2)p^3 + 3n(n-1)p^2 + np] \\
&\quad -11[n(n-1)p^2 + np] + 6np
\end{aligned}$$

Como $\mu_4 = \mu_4' - 4\mu\mu_3' + 6\mu^2\mu_2' - 3\mu^4$

$$\mu_4 = np(1-p)\{3np(1-p) + [1 - 6p(1-p)]\}.$$

El coeficiente de curtosis de la distribución binomial es:

$$\alpha_4 \quad =$$

Coeficiente de curtosis de una distribución binomial

$\mu_2' = n(n-1)p^2 + np$, $\mu_3' = n(n-1)(n-2)p^3 + 3n(n-1)p^2 + np$,
$E[X(X-1)...(X-3)] = n(n-1)(n-3)(n-3)p^4$ y
$E[X(X-1)...(X-3)] = \mu_4' - 6\mu_3' + 11\mu_2' - 6\mu$,
entonces

$$\begin{aligned}
\mu_4' &= n(n-1)(n-2)(n-3)p^4 + 6\mu_3' - 11\mu_2' + 6\mu \\
&= n(n-1)(n-2)(n-3)p^4 + 6[n(n-1)(n-2)p^3 + 3n(n-1)p^2 + np] \\
&\quad -11[n(n-1)p^2 + np] + 6np
\end{aligned}$$

Como $\mu_4 = \mu_4' - 4\mu\mu_3' + 6\mu^2\mu_2' - 3\mu^4$

$$\mu_4 = np(1-p)\{3np(1-p) + [1 - 6p(1-p)]\}.$$

El coeficiente de curtosis de la distribución binomial es:

$$\begin{aligned}
\alpha_4 &= \frac{np(1-p)\{3np(1-p) + [1-6p(1-p)]\}}{(np(1-p))^2} \\
&= \frac{3np(1-p) + [1-6p(1-p)]}{np(1-p)} = 3 + \frac{1-6p(1-p)}{np(1-p)}.
\end{aligned}$$

Tabla con las propiedades de una distribución binomial

Función de probabilidad			Parámetros
$p(x;p,n) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$			n, entero positivo
$x = 0, 1, 2, \ldots, n$			p, $0 \leq p \leq 1$

Mediana μ	Varianza μ_2	Coeficiente de asimetría α_3	Coeficiente de curtosis α_4
np	$np(1-p)$	$\dfrac{(1-2p)}{(np(1-p))^{1/2}}$	$3 + \dfrac{1-6p(1-p)}{np(1-p)}$

Tabla con las propiedades de una distribución binomial

Función de probabilidad	Parámetros
$p(x;p,n) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$	n, entero positivo
$x = 0, 1, 2, \ldots, n$	p, $0 \leq p \leq 1$

Mediana μ	Varianza μ_2	Coeficiente de asimetría α_3	Coeficiente de curtosis α_4
np	$np(1-p)$	$\dfrac{(1-2p)}{(np(1-p))^{1/2}}$	$3 + \dfrac{1-6p(1-p)}{np(1-p)}$

Tanto el coeficiente de asimetría como el coeficiente de curtosis depende del valor de n y p.

Tabla con las propiedades de una distribución binomial

	$p = 0.1$	$p = 0.5$	$p = 0.9$
α_3	$\frac{8}{3\sqrt{n}}$	0	$-\frac{8}{3\sqrt{n}}$
α_4	$3 + \frac{46}{9n}$	$3 - \frac{2}{n}$	$3 + \frac{46}{9n}$

Tabla con las propiedades de una distribución binomial

	$p = 0.1$	$p = 0.5$	$p = 0.9$
α_3	$\dfrac{8}{3\sqrt{n}}$	0	$-\dfrac{8}{3\sqrt{n}}$
α_4	$3 + \dfrac{46}{9n}$	$3 - \dfrac{2}{n}$	$3 + \dfrac{46}{9n}$

La distribución binomial tiene asimetría negativa si $p > 0.5$, asimetría positiva si $p < 0.5$ y es simétrico si $p = 0.5$.

Tabla con las propiedades de una distribución binomial

	$p = 0.1$	$p = 0.5$	$p = 0.9$
α_3	$\dfrac{8}{3\sqrt{n}}$	0	$-\dfrac{8}{3\sqrt{n}}$
α_4	$3 + \dfrac{46}{9n}$	$3 - \dfrac{2}{n}$	$3 + \dfrac{46}{9n}$

La distribución binomial tiene asimetría negativa si $p > 0.5$, asimetría positiva si $p < 0.5$ y es simétrico si $p = 0.5$.

La distribución binomial es relativamente plana si $p = 0.5$, es relativamente picuda para cualquier otro valor de p.

Tabla con las propiedades de una distribución binomial

	$p = 0.1$	$p = 0.5$	$p = 0.9$
α_3	$\frac{8}{3\sqrt{n}}$	0	$-\frac{8}{3\sqrt{n}}$
α_4	$3 + \frac{46}{9n}$	$3 - \frac{2}{n}$	$3 + \frac{46}{9n}$

La distribución binomial tiene asimetría negativa si $p > 0.5$, asimetría positiva si $p < 0.5$ y es simétrico si $p = 0.5$.

La distribución binomial es relativamente plana si $p = 0.5$, es relativamente picuda para cualquier otro valor de p.

Para valores suficientemente grandes de n, si $p = 0.5$ la distribución binomial es mesocúrtica (ni muy plana ni muy picuda).

F.g.m. de una distribución binomial

Como $m_X(t) = E[e^{tX}]$ tenemos que

$$m_X(t) \quad = $$

F.g.m. de una distribución binomial

Como $m_X(t) = E[e^{tX}]$ tenemos que

$$\begin{aligned} m_X(t) &= \sum_{x=0}^{n} e^{tx} \frac{n!}{(n-x)!x!} p^x (1-p)^{n-x} \\ &= \sum_{x=0}^{n} \frac{n!}{(n-x)!x!} (pe^t)^x (1-p)^{n-x} \\ &= \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} (pe^t)^x (1-p)^{n-x} \end{aligned}$$

F.g.m. de una distribución binomial

Como $m_X(t) = E[e^{tX}]$ tenemos que

$$
\begin{aligned}
m_X(t) &= \sum_{x=0}^{n} e^{tx} \frac{n!}{(n-x)!x!} p^x (1-p)^{n-x} \\
&= \sum_{x=0}^{n} \frac{n!}{(n-x)!x!} (pe^t)^x (1-p)^{n-x} \\
&= \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} (pe^t)^x (1-p)^{n-x}
\end{aligned}
$$

Por el teorema del binomio

$$m_X(t) = [pe^t + (1-p)]^n.$$

F.g.m. de una distribución binomial

El primer momento al rededor del cero (μ) es la primera derivada con respecto a t, evaluada en $t = 0$:

F.g.m. de una distribución binomial

El primer momento al rededor del cero (μ) es la primera derivada con respecto a t, evaluada en $t = 0$:

$$\left.\frac{dm_x(t)}{dt}\right|_{t=0} =$$

F.g.m. de una distribución binomial

El primer momento al rededor del cero (μ) es la primera derivada con respecto a t, evaluada en $t = 0$:

$$\left.\frac{dm_x(t)}{dt}\right|_{t=0} = \left. n(e^t p + 1 - p)^{n-1}(pe^t)\right|_{t=0} = n(p + 1 - p)^{n-1} p = np.$$

El segundo momento al rededor del cero (μ_2') es la segunda derivada con respecto a t, evaluada en $t = 0$:

F.g.m. de una distribución binomial

El primer momento al rededor del cero (μ) es la primera derivada con respecto a t, evaluada en $t = 0$:

$$\left.\frac{dm_x(t)}{dt}\right|_{t=0} = n(e^t p + 1 - p)^{n-1}(pe^t)\Big|_{t=0} = n(p + 1 - p)^{n-1} p = np.$$

El segundo momento al rededor del cero (μ_2') es la segunda derivada con respecto a t, evaluada en $t = 0$:

$$\frac{d^2 m_x(t)}{dt^2} =$$

F.g.m. de una distribución binomial

El primer momento al rededor del cero (μ) es la primera derivada con respecto a t, evaluada en $t = 0$:

$$\left.\frac{dm_x(t)}{dt}\right|_{t=0} = \left. n(e^t p + 1 - p)^{n-1}(pe^t)\right|_{t=0} = n(p+1-p)^{n-1} p = np.$$

El segundo momento al rededor del cero (μ_2') es la segunda derivada con respecto a t, evaluada en $t = 0$:

$$\frac{d^2 m_x(t)}{dt^2} = n(n-1)(e^t p + 1 - p)^{n-2}(pe^t)^2 + pe^t \left(n(e^t p + 1 - p)\right)^{n-1}$$

$$\left.\frac{d^2 m_x(t)}{dt^2}\right|_{t=0} =$$

F.g.m. de una distribución binomial

El primer momento al rededor del cero (μ) es la primera derivada con respecto a t, evaluada en $t = 0$:

$$\left.\frac{dm_x(t)}{dt}\right|_{t=0} = n(e^t p + 1 - p)^{n-1}(pe^t)\Big|_{t=0} = n(p+1-p)^{n-1}p = np.$$

El segundo momento al rededor del cero (μ_2') es la segunda derivada con respecto a t, evaluada en $t = 0$:

$$\frac{d^2 m_x(t)}{dt^2} = n(n-1)(e^t p + 1 - p)^{n-2}(pe^t)^2 + pe^t \left(n(e^t p + 1 - p)\right)^{n-1}$$

$$\left.\frac{d^2 m_x(t)}{dt^2}\right|_{t=0} = n(n-1)p^2 + np.$$

Resultó mas fácil usar la f.g.m. para determinar los momentos al rededor del cero de la distribución binomial que calcular los momentos usando la definición en términos de la esperanza.