Función generadora de momentos

Sea X una variable aleatoria discreta X.
Si para algún $h > 0$ se tiene que el valor esperado $E[e^{tX}]$ existe para todo $t \in (-h, h)$, entonces podemos definir la **función generadora de momentos** de X:

$$m_X(t) = E[e^{tX}] = \sum_x e^{tx} P(X = x) \tag{1}$$

La condición de la existencia del valor esperado $E[e^{tX}]$ para todo $t \in (-h, h)$, para algún $h > 0$ es necesaria para que $m_X(t)$ sea diferenciable en $t = 0$.

Se puede probar que si existe la función generadora, entonces es única y determina completamente la distribución.

Función generadora de momentos

Recordamos el siguiente resultado de cálculo

Lema

Si la función $g(t) = \sum_{x \in X} f(x,t)$ converge para todo $t \in (-h,h)$ para algún $h > 0$, entonces existen las derivadas de orden n de $g(t)$ para todo $t \in (-h,h)$ y para todo n entero positivo y

$$\frac{d^r g(t)}{dt^r} = \sum_{x \in X} \frac{d^r f(x,t)}{dt^r}$$

Usando el lema y la función de a esperanza, tenemos que:

Lema *

Si para algún $h > 0$ la función $\sum_x e^{tX} P(X = x)$ converge para todo $t \in (-h,h)$, entonces existen las derivadas de orden n de $g(t)$ para todo $t \in (-h,h)$ y para todo n entero positivo y

$$\frac{d^r E[e^{tX}]}{dt^r} = \sum_{x \in X} \frac{d^r e^{xt}}{dt^r} P(X = x)$$

Función generadora de momentos

Teorema

Si la función generadora de momentos existe para todo t en un intervalo alrededor del cero, entonces existen todos los momentos alrededor del cero.

Demostración:

$$
\begin{aligned}
\frac{dm_X(t)}{dt} &= \frac{d}{dt}E[e^{tX}] = \frac{d}{dt}\sum_x e^{tx}P(x) &= \sum_x \frac{d}{dt}e^{tx}P(x) \\
&= \sum_x xe^{tx}P(x)
\end{aligned}
$$

Si evaluamos la primera derivada en $t = 0$ obtenemos:

$$
\left.\frac{dm_X(t)}{dt}\right|_{t=0} = \left.\sum_x xe^{tx}P(x)\right|_{t=0} = \sum_x xP(x) = E[X] = \mu.
$$

Función generadora de momentos

Para la segunda derivada de la F.g.m. alrededor del cero:

$$\frac{d^2 m_X(t)}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} E[e^{tX}] = \frac{d^2}{dt^2} \sum_x e^{tx} P(x) = \sum_x \frac{d^2}{dt^2} e^{tx} P(x)$$

$$= \sum_x x^2 e^{tx} P(x).$$

Si evaluamos la segunda derivada en $t = 0$ obtenemos:

$$\left.\frac{d^2 m_X(t)}{dt^2}\right|_{t=0} = \left.\sum_x x^2 e^{tx} P(x)\right|_{t=0} = \sum_x x^2 P(x) = E[X^2] = \mu_2'.$$

Función generadora de momentos

En general para la r-ésima derivada de la F.g.m. alrededor del cero:

$$\begin{aligned}\frac{d^r m_X(t)}{dt^r} &= \frac{d^r}{dt^r} E[e^{tX}] &= \frac{d^r}{dt^r} \sum_x e^{tx} P(x) &= \sum_x \frac{d^r}{dt^r} e^{tx} P(x) \\ &= \sum_x x^r e^{tx} P(x).\end{aligned}$$

Si evaluamos la r-ésima derivada en $t = 0$ obtenemos:

$$\left.\frac{d^r m_X(t)}{dt^r}\right|_{t=0} = \left.\sum_x x^r e^{tx} P(x)\right|_{t=0} = \sum_x x^r P(x) = E[X^r] = \mu'_r.$$

Función generadora de momentos centrales

La **función generadora de momentos centrales**, denotado por $m_{X-\mu}(t)$, es el valor esperado de $e^{t(X-\mu)}$ donde X es una variable aleatoria y μ es su media.

La función generadora de momentos centrales existe si el valor esperado existe para cualquier valor de t en algún intervalo abierto alrededor de μ y se define como

$$m_{(X-\mu)}(t) = E[e^{t(X-\mu)}] = \sum_{x} e^{t(x-\mu)} P(X = x)$$

Función generadora de momentos centrales

De manera análoga al caso de la función generadora de momentos al rededor del cero, tenemos que

Teorema

Si la función generadora de momentos centrales existe para todo t en un intervalo alrededor de la media, entonces existen todos los momentos alrededor de la media.

$$\begin{aligned}\frac{d^r m_{X-\mu}(t)}{dt^r} &= \frac{d^r}{dt^r} E[e^{t(X-\mu)}] = \sum_x \frac{d^r}{dt^r} e^{t(x-\mu)} P(x) \\ &= \sum_x (x-\mu)^r e^{t(x-\mu)} P(x).\end{aligned}$$

Si evaluamos la r-ésima derivada en $t = 0$ tenemos que

$$\left.\frac{d^r m_{X-\mu}(t)}{dt^r}\right|_{t=0} = \sum_x (x-\mu)^r P(x) = E[(X-\mu)^r] = \mu_r.$$

Ejemplo 1

Calcula la función generadora de momentos de la variable aleatoria X cuya distribución se encuentra en la tabla.

x	0	1	2
$P(X=x)$	0.2	0.3	0.5

Solución:

$$
\begin{aligned}
m_X(t) &= E\left[e^{tX}\right] = \sum_0^2 e^{tx} P(X=x) \\
&= e^{0t} P(X=0) + e^{1t} P(X=1) + e^{2t} P(X=2) \\
&= 0.2 + 0.3e^{t} + 0.5e^{2t}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 2

Calcula la función generadora de momentos y el primer momento alrededor de cero de la variable aleatoria X cuya función de probabilidad $f(x)$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} & \lambda > 0,\ x = 0, 1, \ldots \\ 0 & e.o.c. \end{cases}$$

Solución:
Primero recordamos que

$$e^{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n}}{n!}. \qquad (2)$$

Ejemplo 2 cont.

Ahora podemos determinar
la función generadora de momentos de X:

$$m_X(t) = E\left[e^{tX}\right] = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{tx} e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{tx} \lambda^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(e^t \lambda)^x}{x!} = e^{-\lambda} \left(e^{\lambda e^t}\right) = e^{\lambda (e^t - 1)}$$

La última igualdad es consecuencia de la ecuación (2).
Para encontrar $E[X]$ (el primer momento alrededor de cero) de X, derivamos la función generadora de momentos con respecto a t y evaluamos en $t = 0$.

$$E[X] = \left.\frac{dm_X(t)}{dt}\right|_{t=0} = \lambda e^t e^{\lambda(e^t - 1)}\Big|_{t=0} = \lambda e^0 e^{\lambda(1-1)} = \lambda.$$