Momentos de una variable aleatoria

Los **momentos** de (una distribución de probabilidad de) una variable aleatoria X son medidas que describen las características de (la distribución de) la variable aleatoria X.

Proporcionan información acerca del comportamiento de algunas medidas de localización de la distribución de X.

Distinguimos principalmente entre los momentos alrededor del cero o alrededor de μ (la esperanza de X), pero se pueden definir momentos alrededor de cualquier punto.

El estudio de los momentos tiene mucha utilidad cuando no se conoce la distribución de probabilidad de una variable aleatoria.

Los resultados están sujetos a la existencia de las sumas (series) correspondientes.

Momentos al rededor del cero

Sea X una variable aleatoria discreta.
El r**-ésimo momento** alrededor del cero se define como:

$$\mu_r' = E[X^r] = \sum_x x^r P(x). \tag{1}$$

El **primer momento alrededor del cero es la media**, o el valor esperado, es decir

$$\mu_1' = E[X] = \mu.$$

La **media** es una medida (un número) que cumple que los valores de la variable aleatoria tienden a agruparse alrededor de ella.
Por eso es una medida de tendencia central.

Momentos al rededor de la media

Sea X una variable aleatoria discreta.
El r**-ésimo momento central** es el r-ésimo momento alrededor de la media μ y se define como:

$$\mu_r = E[(X-\mu)^r] = \sum_x (x-\mu)^r P(x). \tag{2}$$

El momento central cero de una variable aleatoria es uno:

$$\mu_0 = E[(X-\mu)^0] = E[1] = 1.$$

El primer momento alrededor de la media μ es cero:

$$\mu_1 = E[(X-\mu)^1] = E[X-\mu] = E[X] - \mu = 0.$$

El segundo momento alrededor de la media μ es la varianza:

$$\mu_2 = E[(X-\mu)^2] = Var(X) = E[X^2] - E^2[X] = \mu_2' - \mu^2.$$

Tercer momento central

Por el Teorema del Binomio sabemos que

$$(X-\mu)^r = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \frac{r!}{i!(r_i)!} \mu^i x^{r-i}.$$

Por las propiedades de la esperanza tenemos que

$$\begin{aligned} \mu_r = E[(X-\mu)^r] &= \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \frac{r!}{i!(r_i)!} \mu^i E[X^{r-i}] \\ &= \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \frac{r!}{i!(r-i)!} \mu^i \mu'_{r-i}. \end{aligned}$$

Para el tercer momento central tenemos que

$$\mu_3 = \mu'_3 - 3\mu\mu'_2 + 2\mu^3. \tag{3}$$

Tercer momento central

Si una distribución de probabilidad presentan un sólo pico, el tercer momento proporciona información de su asimetría:

La magnitud del tercer momento central depende de la magnitud de la variable aleatoria.

El **coeficiente de asimetría** es una medida de asimetría estandarizada con respecto la disperción de la distribución:

$$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} \tag{4}$$

Tercer momento central

La distribución es asimétrica negativa si $\alpha_3 < 0$;

La distribución es simétrica si $\alpha_3 = 0$;

La distribución es asimétrica positiva si $\alpha_3 > 0$.

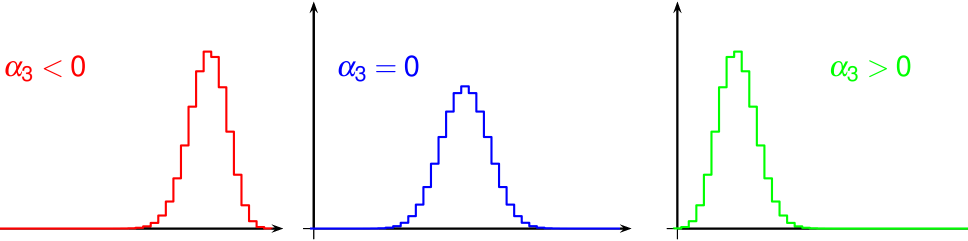

Figure: Coeficiente de simetría α_3 y su efecto en la distribución.

Cuarto momento central

Por el Teorema del Binomio y propiedades de la esperanza:

$$\mu_r = E[(X-\mu)^r] = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \frac{r!}{i!(r-i)!} \mu^i \mu'_{r-i}.$$

Para el cuarto momento central tenemos que

$$\mu_4 = \mu'_4 - 4\mu\mu'_3 + 6\mu^2\mu'_2 - 3\mu^4. \tag{5}$$

Si una distribución de probabilidad presenta un solo pico, el cuarto momento proporciona información de su **curtosis.**

El **coeficiente de curtosis** mide la curtosis estandarizada respecto a la disperción de la distribución.

$$\alpha_4 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} \tag{6}$$

Cuarto momento central

El pico de la distribución es relativamente plana si $\alpha_4 < 3$;

El pico de la distribución no es ni muy alto ni muy plano (mesocúrtica) si $\alpha_4 = 3$;

El pico de la distribución es relativamente alto si $\alpha_4 > 3$.

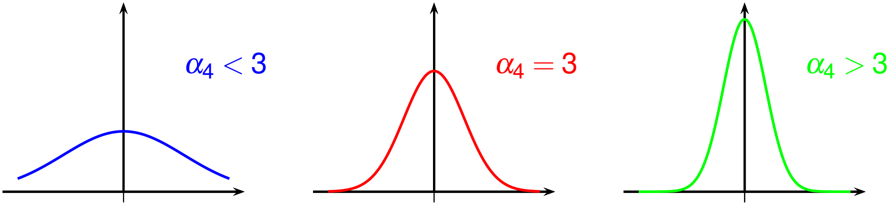

Figure: Coeficiente de curtosis α_4 y su efecto en la distribución.

Ejemplo

Dos vendedores visitan de 0 a 8 clientes por semana.
Sean X y Y las variables aleatorias respectivamente.
Los valores de las probabilidad para X y Y están en las tablas.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
P(x)	0.02	0.09	0.21	0.28	0.23	0.12	0.04	0.01	0

y	0	1	2	3	4	5	6	7	8
P(y)	0.06	0.21	0.28	0.24	0.13	0.05	0.02	0.01	0

Determina la media, la desviación estandar, el coeficiente de variación, asimetría y curtosis de cada variable aleatoria y compara los resultados.

Solución para la variable aleatoria X

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
P(x)	0.02	0.09	0.21	0.28	0.23	0.12	0.04	0.01	0

$$\mu(X) = (0)(0.02) + (1)(0.09) \cdots + (7)(0.01) + (8)(0) = 3.18;$$

$$\mu_2'(X) = (0)^2(0.02) + (1)^2(0.09) \cdots + (7)^2(0.01) + (8)^2(0) = 12.06;$$

$$\mu_3'(X) = (0)^3(0.02) + (1)^3(0.09) \cdots + (7)^3(0.01) + (8)^3(0) = 51.12;$$

$$\mu_4'(X) = (0)^4(0.02) + (1)^4(0.09) \cdots + (7)^4(0.01) + (8)^4(0) = 235.86;$$

Solución para la variable aleatoria X

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
P(x)	0.02	0.09	0.21	0.28	0.23	0.12	0.04	0.01	0

$$\mu(X) = 3.18;\ \mu_2'(X) = 12.06;\ \ \mu_3'(X) = 51.12;\ \mu_4'(X) = 235.86;$$

$$\mu_2(X) = \mu_2' - \mu^2 = 12.06 - (3.18)^2 = 1.95;$$

$$\mu_3(X) = \mu_3' - 3\mu\mu_2' + 2\mu^3 = 0.3825;$$

$$\mu_4(X) = \mu_4' - 4\mu\mu_3' + 6\mu^2\mu_2' - 3\mu^4 = 10.565;$$

$$\sigma_X = \sqrt{1.95} = 1.3964; \quad V_X = \frac{\sigma_X}{\mu_X} = \frac{1.3964}{3.18} = 0.4391;$$

$$\alpha_3(X) = \frac{\mu_3(X)}{(\mu_2(X))^{3/2}} = \frac{0.3825}{1.95^{3/2}} = 0.1405;$$

$$\alpha_4(X) = \frac{\mu_4(X)}{(\mu_2(X))^2} = \frac{10.565}{1.95^2} = 2.7784.$$

Solución para la variable aleatoria Y

y	0	1	2	3	4	5	6	7	8
P(y)	0.06	0.21	0.28	0.24	0.13	0.05	0.02	0.01	0

Usando los mismos procedimientos obtenemos los siguientes resultados para la variable aleatoria Y:

$\mu(Y) = 2.45;\ \mu_2'(Y) = 8.03;\ \mu_3'(Y) = 31.25;\ \mu_4'(Y) = 138.59;$

$\mu_2(Y) = Var(Y) = 2.03;\quad \mu_3(Y) = 1.6418;\quad \mu_4(Y) = 13.3504;$

$\sigma_Y = 1.4247;\quad V_Y = 0.5815;\quad \alpha_3(Y) = 0.428;$
$\alpha_4(X) = 2.2241.$

Comparativo entre las medidas de las variables aleatorias X y Y

	X	Y
μ	3.18	2.45
Var	1.95	2.03
σ	1.3964	1.4247

	X	Y
V	0.4391	0.5815
α_3	0.1405	0.428
α_4	2.7784	2.2241

El agente X visita en promedio mas clientes que el agente Y.

El coeficiente de variación es menor para X que para Y, los datos de X están agrupados mas cerca de su media que los datos de Y.

El coeficiente de asimetría α_3 es positivo para X y para Y, ambas tiene una distribución asimétrica positiva. Hay mas datos mayores a la media que datos menores a la media.

El coeficiente de curtosis α_4 es menor a 3 para X y para Y, para ambas el pico de la distribución de X es relativamente plana. Hay *relativamente* pocos datos al rededor de la media.