Variables Aleatorias

Los eventos de un espacio muestral pueden ser del tipo cualitativo o cuantitativo. Por ejemplo:

Cualitativo: sí/no, sol/águila, funciona/defectuosa, color de los ojos, la ubicación a una hora determinada, el genero.

Cuantitativo: Suma de dos dados, cuańtos alumnos llegaron puntual, la altura de una persona, el ingreso mensual, el tiempo de espera en cierto consultorio, el tiempo entre una visita y otro a una página de internet.

En el caso de un espacio muestral del tipo cualitativo, se requiere la asignación de un valor numérico a cada evento.
Esta asignación recibe el nombre de **variable aleatoria**.

Variables Aleatorias

Sea Ω un espacio muestral sobre el cual se puede definir una función de probabilidad. Una **variable aleatoria** X es una función real $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definida sobre el conjunto Ω.
Una variable aleatoria relaciona un número a cada evento de Ω.

Experimentos y ejemplo de una variable aleatoria.

1. Al lanzar un dado dos veces. Una variable aleatoria: suma de los puntos.
2. Lanzar una moneda. Una variable aleatoria: $X = 0$ en caso de águila y $X = 1$ en caso de sol.
3. En fútbol. Una variable aleatoria: a cada equipo y cada partido se le asigna 0 si pierde, 1 si empata y 3 si gana.
4. Un buzo se sumerge al mar. Una variable aleatoria: el tiempo que quede sumergido al agua.

Variables Aleatorias

En un experimento dado se pueden definir muchas variables aleatorias diferentes.

Ejemplo

1. *En la bolsa de valores: nos interesa como cerró, no todas las variaciones que se efectuaron.*
2. *En un almacén: nos interesa el stock al final del día, o bien los artículos cuyo inventario esta por debajo del stock mínimo.*
3. *Al lanzar un dado dos veces: nos interesa la suma de los puntos, la diferencia entre los puntos de los dados, mayor puntaje etc.*
4. *Un buzo se sumerge al mar: nos interesa la mayor profundidad, el tiempo que quede sumergido al agua, el número de perlas que extrae, el peso mayor de una perla extraída.*

Ejemplo 1

Considera un partido de futbol. Los posibles resultados para el equipo de casa son ganar, empate o perder.
Sea X la variable aleatoria que representa los puntos ganados.
$X = 0$ si el equipo pierde, $X = 1$ si empata y $X = 3$ si gana.
La probabilidad de que gane es 0.4, que empate es 0.2 y que pierda es 0.4.
¿La probabilidad asignada a la variable aleatoria X cumple los Axiomas de Probabilidad?

Recordamos cuales son los axiomas:

1. Para el conjunto Ω se tiene que $P(\Omega) = 1$.
2. Para todo $A \subset \Omega$, $0 \leq P(A)$.
3. Si A y B son eventos mutuamente excluyentes, entonces

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Solución del ejemplo 1

La probabilidad de cada valor de X es un número entre 0 y 1:

$$P(X = 0) = 0.4 \qquad P(X = 1) = 0.2 \qquad P(X = 3) = 0.4$$

Probabildad de la union de eventos ajenos es la suma de sus probabilidades:

$$\begin{aligned}
P(X = 0, 1) &= P(X \neq 3) = 1 - P(X = 3) = 1 - 0.4 = 0.6; \\
P(X = 0) + P(X = 1) &= 0.4 + 0. = 0.6; \\
P(X = 0, 3) &= P(X \neq 1) = 1 - P(X = 1) = 1 - 0.2 = 0.8; \\
P(X = 0) + P(X = 3) &= 0.4 + 0.4 = 0.8; \\
P(X = 1, 3) &= P(X \neq 0) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0.4 = 0.6; \\
P(X = 1) + P(X = 3) &= 0.2 + 0.4 = 0.6;
\end{aligned}$$

La suma de la probabilidades de los valor de X es igual a 1.

$$\sum_{i \in \{0,1,3\}} P(X = i) = 0.4 + 0.2 + 0.4 = 1$$

Ejemplo 2

Considera la variable aleatoria cuantitativa que mide el número de estudiantes de un curso de primer trimestre con inasistencias i.

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Tot
x_i	1	2	3	3	8	8	5	4	2	3	1	40
f_i	.025	.05	.075	.075	.2	.2	.125	.1	.05	.075	.025	1

En el renglón i aparece el número de inasistencias que hubo durante el trimestre, en el renglón x_i es el número de alumnos que tienen i faltas.
Los valores del renglón f_i son las "*frecuencias relativas* que se obtienen dividiendo la frecuencia x_i entre el total de alumnos, es decir,

$$f_i = f(i) = \frac{x_i}{40}.$$

Distribución de probabilidad

Sea X una variable aleatoria sobre es espacio muestral Ω.
Decimos que X es una **variable aleatoria discreta** si los valores que puede tomar X no contienen un intervalo abierto, es decir, el conjunto de valores que puede tomar (también llamado el **rango** de X) X es un conjunto numerable.

Por ejemplo:
la edad en años,
el color de ojos,
el número de idiomas que dominan.

Función de probabilidad

Sea X una variable aleatoria discreta sobre es espacio muestral Ω y sea f su función de probabilidad.
El conjunto de todos los valores de la variable aleatoria discreta X junto con su función de probabilidad es la **distribución de probabilidad** de la variable aleatoria X.
Si la variable aleatoria es distreta, su **función de probabilidad** debe satisfacer las siguientes propiedades:

1. $0 \leq f(x) \leq 1$,
2. $\sum_{x \in X} f(x) = 1$.

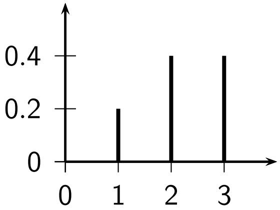
Ejemplo 3

Considera la variable aleatoria X, y su función de probabilidad $f(x)$. Grafica la función de probabilidad y determina $P(X \leq 2)$, $P(X = 1)$ y $P(X = 3)$.

$$f(x) = \begin{cases} 0.2 & \text{si } x = 1; \\ 0.4 & \text{si } x = 2; \\ 0.4 & \text{si } x = 3; \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Solución:

Primero graficamos la función de probabilidad $f(x)$.



$P(X \leq 2) = P(X = 1) + P(X = 2) = 0.6$ y $P(X = 1) = 0.2$, mientras que $P(X = 3) = 0.4$.

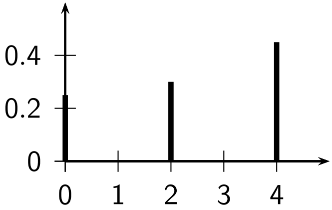
Ejemplo 4

Considera la variable aleatoria X. Determina el valor de k para que $f(x)$ sea una función de probabilidad de X y grafícala.

$$f(x) = \begin{cases} 0.25 & \text{si } x = 0; \\ 0.3 & \text{si } x = 2; \\ k & \text{si } x = 4; \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Solución:

Por las propiedades de una función de probabilidad, tenemos que $\sum_{x=0,2,4} f(x) = 1$ por lo que $0.25 + 0.3 + k = 1$ y $k = 0.45$.
Graficamos la función de probabilidad $f(x)$.



función de probabilidad acumulada

A veces nos interesa responder a preguntas tipo

> *¿cuál es la probabilidad de que la variable aleatoria sea a lo mas x_0?*

La notación de probabilidad es $P(X \leq x_0)$.

Para este tipo de preguntas usamos el concepto de probabilidad acumulada.
La **función de probabilidad acumulada**, $F(x)$, de una variable aleatoria discreta se define como

$$F(x_0) = P(X \leq x_0)$$

y debe satisfacer las siguientes dos propiedades.

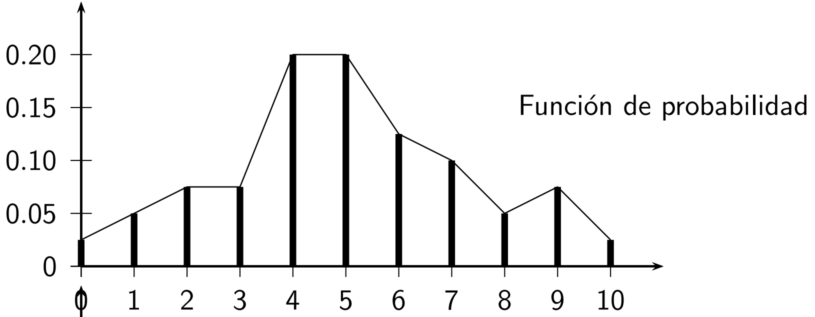
1. $0 \leq F(x) \leq 1$,
2. $F(x_0) = P(X \leq x_0) = \sum_{x \leq x_0} f(x)$.

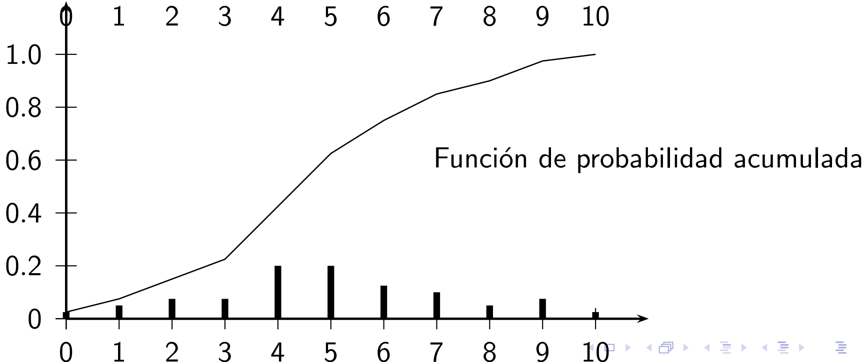
Ejemplo 5

Considera el ejemplo 2 acerca de estudiantes con inasistencias i. Extendemos el cuadro para incluir la frecuencia acumulada y la frecuencia relativa acumulada $F(i)$.

i	x_i	$\sum_{j=0}^{j=i} x_j$	$f(i)$	%	$F(i)$
0	1	1	0.025	2.5 %	0.025
1	2	3	0.05	5.0 %	0.075
2	3	6	0.075	7.5 %	0.15
3	3	9	0.075	7.5 %	0.225
4	8	17	0.2	20.0 %	0.425
5	8	25	0.2	20.0%	0.625
6	5	30	0.125	12.5%	0.75
7	4	34	0.1	10.0%	0.85
8	2	36	0.05	5.0%	0.90
9	3	39	0.075	7.5%	0.975
10	1	40	0.025	2.5%	1
Total	40		1	100.0%	

Gráficas del ejemplo 5





Ejemplo 6

Sea X la variable aleatoria discreta de la suma de los puntos en dos lanzamientos de un dado.

Construimos una tabla con las probabilidades teóricas.

i	x_i	acumulada	$f(i)$	%	$F(i)$
2	1	1	$1/36$	2.77 %	0.0277
3	2	3	$2/36$	0.0555	0.0833
4	3	6	$3/36$	0.0833	0.1666
5	4	10	$4/36$	0.1111	0.2777
6	5	15	$5/36$	0.1388	0.4166
7	6	21	$6/36$	0.1666	0.5833
8	5	26	$5/36$	0.1388	0.722
9	4	30	$4/36$	0.1111	0.833
10	3	33	$3/36$	0.0833	0.9166
11	2	35	$2/36$	0.0555	0.9722
12	1	36	$1/36$	0.0277	1
Total	36		1	1	

Ejemplo 6 cont.

La función de probabilidad de X es:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{6-|7-x|}{36} & \text{si } x = 2,3,\ldots,12; \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En la práctica de esta semana 5 van a:
- comprobar que $f(x)$ es una función de probabilidad,
- determinar la función de probabilidad acumulada, y
- graficar ambos en excel.

Además, van a determinar la probabilidad de que la suma:
- sea a lo mas 4; sea al menos 6 y esté entre 4 y 7.

La distribución de probabilidad acumulada está completamente determinada por la función de distribución.
El valor de $F(x_0)$ en cada número x_0 es la probabilidad de que la variable aleatoria sea menor o igual que x_0.

Graficas del ejemplo 6