Probabilidad condicional

La probabilidad de cierto evento depende del espacio muestral.

De 15 a 24 años (Fuente: Inegi)	Total	Hombre	Mujer	h/m
Total (todas las causas)	23,369	17,629	5,736	3.07
Agresiones	6,345	5,693	640	
Accidentes	6,084	5,061	1,023	
De tráfico (con motor)	3,666	3,026	640	
Lesiones auto intencional.	1,775	1,329	446	
Total de muertes violentas	14,204	12,083	2,109	

Sea A el evento de muerte violenta. Si Ω es el total de muertes,

$$P(A) = \frac{14,204}{23,369} = 0.6078,$$

Si Ω es el total de muertes de mujeres,

$$P(A) = \frac{2,109}{5,736} = 0.3677.$$

Probabilidad condicional

En la probabilidad condicional condicionamos (restringimos) el espacio muestral.
La condición en este caso es que la víctima sea mujer.

Sean A y B dos eventos tales que $P(B) \neq 0$. La **probabilidad condicional** de A dado B se calcula según la siguiente formula.

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \tag{1}$$

Del ejemplo anterior (Inegi), tenemos que $P(A \mid B) = 0.3677$ mientras que $P(A) = 0.6078$.

Ejemplo 1

Considera el experimento de lanzar un dado con seis lados.

Determina la probabilidad de que el dado muestra 2;
muestra 2 si sabemos que muestra a lo mas 4;
muestra 2 si sabemos que muestra un primo;
muestra a lo mas 4 si sabemos que muestra un primo; y
muestra un número primo si sabemos que muestra a lo mas 4.

El espacio muestral $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}$. Definimos los eventos:
A el dado muestra 2;
B el dado muestra a lo mas 4; y
C el dado muestra un número primo.

$P(A) = 1/6$, $P(A \mid B) = 1/4$, $P(A \mid C) = 1/3$,
$P(B \mid C) = 2/3$, $P(C \mid B) = 1/2$.

Ejemplo 2

Considera el ejemplo de la fabricación de latas.
La probabilidad de una fisura en el costado es 0.02; la probabilidad de una fisura en la tapa es 0.03 y la probabilidad de una fisura tanto en el costado como en la tapa de una lata es 0.01.
¿Cuál es la probabilidad de que una lata que tiene una fisura en

1. la tapa también tiene una fisura en el costado?
2. el costado no tiene una fisura en la tapa?

C es el evento de fisura en el costado, T el de fisura en la tapa.

$$P(C) = 0.04, \qquad P(T) = 0.03, \qquad P(C \cap T) = 0.01$$

1. La restricción es que la lata tiene una fisura en la tapa.

$$P(C \mid T) = \frac{P(C \cap T)}{P(T)} = \frac{0.01}{0.03} = 1/3 = 0.3333.$$

2. La restricción es que la lata tiene una fisura en el costado.

$P(\overline{T} \cap C) = P(C) - P(C \cap T) = 0.03$ y

$$P(\overline{T} \mid C) = \frac{P(\overline{T} \cap C)}{P(C)} = \frac{0.03}{0.04} = 0.75.$$

Ejemplo 3

Considera el ejemplo del uso de gmail y Google.

La probabilidad de que usa gmail es 0.42; y la probabilidad de que una persona que usa Google es 0.67 y que use ambos es 0.20.

¿Cuál es la probabilidad de que una persona que

1. usa gmail también usa Google?

2. no usa gmail si sí usa Google?

Probabilidad condicional

En probabilidad condicional asumimos que la probabilidad de A se ve afectado por el evento B.
Si este no es el caso, entonces $P(A \mid B) = P(A)$.
La justificación de la siguiente proposición se deja como tarea.

Proposition

Dos eventos A y B son **independientes** si

$$P(A) = 0, \quad P(B) = 0 \quad o \quad P(A \mid B) = P(A). \tag{2}$$

Usamos los datos de Inegi, usando la proposición anterior, tenemos que los eventos A una "*muerte fue violenta*" y B "*muerte de una mujer*" **no son eventos independientes** ya que
$P(A \mid B) = 0.3677$ mientras que $P(A) = 0.6078$.

Teorema La ley de Probabilidad Total de Bayes

Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ una partición del espacio muestral y B un evento tal que se $P(B \mid A_i)$ son conocidos.
La probabilidad del evento B está dado por:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i)P(A_i).$$

Proof.
Podemos escribir el evento B como
$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \cdots \cup (B \cap A_n)$.
Los conjuntos $B \cap A_i$ son ajenos dos a dos, por lo que
$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \cdots + P(B \cap A_n)$.
Usando la probabilidad condicional tenemos para todo i
$P(B \cap A_i) = P(B \mid A_i)P(A_i)$

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \mid A_1)P(A_1) + P(B \mid A_2)P(A_2) + \cdots + P(B \mid A_n)P(A_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i)P(A_i). \end{aligned}$$

$\square$

La ley de Probabilidad Total de Bayes

Ejemplo

Recibes USB de tres fabricantes A_1, A_2, A_3.
Compras 50% a A_1; 25% a tanto A_2 como A_3.
El porcentaje de USB defectuosos es 5%, 10% y 12% resp.
Si los USB se almacenan sin importar el proveedor.
¿Cuál es la probabilidad de que USB es defectuoso?
Solución:
Sea B el evento de un USB defectuoso:

$$\begin{array}{lll} P(A_1) = 0.5, & P(A_2) = 0.25, & P(A_3) = 0.25, \\ P(B \mid A_1) = 0.05, & P(B \mid A_2) = 0.1, & P(B \mid A_3) = 0.12. \end{array}$$

Por la Ley de Probabilidad Total tenemos que.

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \mid A_1)P(A_1) + P(B \mid A_2)P(A_2) + P(B \mid A_3)P(A_3) \\ &= 0.05(0.5) + 0.1(0.25) + 0.12(0.25) \;=\; 0.08. \end{aligned}$$

La probabilidad de que un USB sea defectuoso es 0.08.

Aplicaciones

El teorema de Bayes es una aplicación de la probabilidad condicional y es la base de la inferencia estadística bayesiana, que usa la interpreción subjetiva de probabilidad.

Ejemplo

Considera el ejemplo anterior. Si un USB funciona, ¿cuál es la probabilidad de que proviene del proveedor A_2?

$P(A_1) = 0.5$ $P(A_2) = 0.25$ $P(A_3) = 0.25$ $P(B) = 0.08$

$P(B \mid A_1) = 0.05$ $P(B \mid A_2) = 0.1$ $P(B \mid A_3) = 0.12$

Usamos probabilidad condicional.

$$P(A_2 \mid B^c) = \frac{P(A_2 \cap B^c)}{P(B)} \quad \textit{donde } P(A_2 \cap B^c) = P(A_2)P(B^c \mid A_2)$$

$$= \frac{P(A_2)P(B^c \mid A_2)}{P(B^c)} = \frac{(0.25)(0.9)}{0.92} = 0.2446$$

La probabilidad de un USB que funciona venga de A_2 es 0.2446.

Aplicaciones

El matemático Thomas Bayes (1702-1761) generalizó este tipo de ejemplos usando la Ley de Probabilidad Total.
Motivamos la generalización mediante un ejemplo:
Un empresario sabe que el resultado final de su producción A está afectado por diferentes eventos aleatorias $B_1, B_2, \dots, B_n$.
El empresario no conoce la probabilidad exacta de cada evento, pero tiene una idea subjetiva acerca de cual es su probabilidad.
Como estas probabilidades a menudo están basadas en evidencias o creencias y prejuicios propios, son probabilidades subjetivas y en el contexto del Teorema de Bayes, se llaman **probabilidad a priori** porque representan las probabilidades subjetivas antes de tener los resultados de la produción dada.
Las **probabilidades a posteriori** son las probabilidades subjetivas corregidas, después de tener los resultados de la producción.
En el ejemplo 2 el enunciado nos proporcionaron las probabilidades a priori, para poder calcular la probabilidad a posteriori de que un microchip que sí funcione viene del proveedor B_2.

Teorema de Bayes

Sean $A_1, A_2, \ldots A_n$ una partición del espacio muestral y B un evento con probabilidad no cero con $P(B \mid A_i)$ conocidos.
La probabilidad de A_j dado B está dado por:

$$P(A_j \mid B) = \frac{P(B \mid A_j)P(A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i)P(A_i)}.$$

Proof.
Por la definición de probabilidad condicional tenemos que

$$(i)\ P(A_j \mid B) = \frac{P(A_j \cap B)}{P(B)}, \quad y \quad (ii)\ P(B \mid A_j) = \frac{P(B \cap A_j)}{P(A_j)}.$$

Por la ecuación (ii) tenemos que $P(B \cap A_j) = P(B \mid A_j)P(A_j)$.

$$P(A_j \mid B) = \frac{P(A_j \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B \mid A_j)P(A_j)}{P(B)}.$$

Por la Ley de probabilidad total $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i)P(A_i)$.

$$P(A_j \mid B) = \frac{P(B \mid A_j)P(A_j)}{P(B)} = \frac{P(B \mid A_j)P(A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i)P(A_i)} \qquad \square$$

Ejemplo 1

En un centro médico 90% de los fumadores y 5% de los no fumadores que sospechaban tener cáncer de pulmón, sí tenían. La proporción de fumadores es 0.45 ¿cuál es la probabilidad de que un paciente con cáncer pulmonar, seleccionado al azar, fume?

Solución:

Sea F_1 el evento de ser fumador y F_2 el evento de no ser fumador y sea C el evento de tener cáncer pulmonar.

Las probabilidades a priori de F_1 y F_2 es $P(C \mid F_1) = 0.90$ y $P(C \mid F_2) = 0.05$ resp.

$$P(F_1) = 0.45 \qquad P(F_2) = 0.55$$

Para calcular la probabilidad a posteori:

$$\begin{aligned} P(F_1 \mid C) &= \frac{P(C \mid F_1)P(F_1)}{P(F_1)P(C \mid F_1) + P(F_2)P(C \mid F_2)} \\ &= \frac{(0.45)(0.9)}{(0.45)(0.9) + (0.55)(0.05)} = 0.9364. \end{aligned}$$

De las personas con cáncer pulmonar la probabilidad de fumar es

Ejemplo 2

Una compañía quiere introducir un nuevo producto. El director quiere que sea mejor que el de su competidor mas cercano.

Se realizó una evaluación preliminar entre el personal de la empresa acerca de la posible superioridad de la calidad. Del personal que participaron en la encuesta 50% opinan que es superior, 30% opinan que tienen la misma calidad y 20% opinan que es inferior.

Con base en encuetas similares, se sabe que si el producto es superior la encuesta lo detecta con probabilidad de

0.7 si los empleados afirman que es de calidad superior
0.4 si los empleados afirman que es de la misma calidad
0.2 si los empleados afirman que es de calidad inferior

Dado el resultado de la encuesta, ¿cuál es la probabilidad (corregida) de que la encuesta revela que el producto sea superior?

Solución del ejemplo 2

Sean $A_1, \ A_2, \ A_3$ los eventos de que el producto sea de calidad superior, igual o inferior resp. y sea S el evento de que la encuesta revela un producto superior.

$$\begin{array}{lll} P(A_1) = 0.5, & P(A_2) = 0.3, & P(A_3) = 0.2, \\ P(S \mid A_1) = 0.7, & P(S \mid A_2) = 0.4, & P(S \mid A_3) = 0.2. \end{array}$$

Usando el Teorema de Bayes

$$\begin{aligned} P(A_1 \mid S) &= \frac{P(S \mid A_1)P(A_1)}{P(A_1)P(S \mid A_1) + P(A_2)P(S \mid A_2) + P(A_3)P(S \mid A_3)} \\ &= \frac{(0.7)(0.5)}{(0.7)(0.5) + (0.4)(0.3) + (0.2)(0.2))} = 0.6863. \end{aligned}$$

La probabilidad a posterior (basado en la encuesta) de que la encuesta revela que el producto es superior sabiendo que el producto es superior es 0.6863.