UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo
Unidad Cuajimalpa

Algebra Lineal I.
(Examen Global)

I. Espacios Vectoriales

Ejercicio 1. *Sea* $\mathbf{V}$ *el conjunto de sucesiones* $\{a_n\}$ *de números reales. Para* $\{a_n\}, \{b_n\} \in \mathbf{V}$ *y todo número real* k*, se define*

$$\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\} \qquad y \qquad t\{a_n\} = \{t\, a_n\}$$

Muestra que con esas operaciones $\mathbf{V}$ *es un espacio vectorial.*

Ejercicio 2. *Sea* S *un conjunto no vacío y* $\mathbb{F}$ *un campo. Sea* $\mathcal{F}(S, \mathbb{F})$ *el conjunto de funciones* $f : S \to \mathbb{F}$*. Muestra que para cualquier* $s_0 \in S$*, el conjunto*

$$\Big\{ f \in \mathcal{F}(S, \mathbb{F}) : f(s_0) = 0 \Big\}$$

es un subespacio de $\mathcal{F}(S, \mathbb{F})$*.*

II. Dimensión y Bases

Ejercicio 3. *Sea* A *una matriz de* $n \times n$*. Demuestra que* A *es no singular si, y sólo si la dimensión del espacio solución del sistema homogéneo* $Ax = 0$ *es cero.*

Ejercicio 4. *Sea* $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *una base para un espacio vectorial* V *de dimensión* n*. Demuestre que si* A *es una matriz de* $n \times n$ *no singular, entonces* $\{Av_1, Av_2, \ldots, Av_n\}$ *también es una base para* V*.*

III. Transformaciones lineales

Ejercicio 5. *Muestra que* $T : P_2 \to P_3$ *dada por* $T(f(x)) = xf(x) + f'(x)$ *es una transformación lineal. Determina bases para* $\ker(T)$ *y* $\operatorname{Im}(T)$*.*

Ejercicio 6. *Definamos* $T : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to P_2$*, mediante*

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a + c) + (2d)x + bx^2.$$

Ssean

$$\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \qquad \text{y} \qquad \gamma = \{1, x, x^2\}$$

Determina $[T]_\beta^\gamma$*.*