Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Unidad Cuajimalpa

ALGEBRA LINEAL I

V EXAMEN PARCIAL

- - -

11 de julio, 2020.

Algebra Lineal I.

(5o. Examen)

I. Teoría de gráficas

Definición 1. *Una gráfica dirigida es una pareja $G = (V, A)$ tal que V es un conjunto de* vértices *y A es un conjunto de* aristas, *formado por parejas ordenadas de vértices.*

Definición 2. *Un subconjunto Γ de una gráfica dirigida G se denomina* **ciclo** *si satisface las siguientes condiciones*

(a) El subconjunto contiene al menos tres vértices;

(b) Para cada par del vértices $v_i, v_j \in \Gamma$, tanto (v_i, v_j) como (v_j, v_i) son aristas de la gráfica;

(c) El subconjunto es tan grande como sea posible; es decir, no es posible agregar otro vértice al subconjunto que que se cumpla (b).

Definición 3. *Sea M la matriz de adyacencia de la gráfica G. Definimos la matriz $S = [s_{ij}]$ como*

$$s_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } m_{ij} = m_{ji} = 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

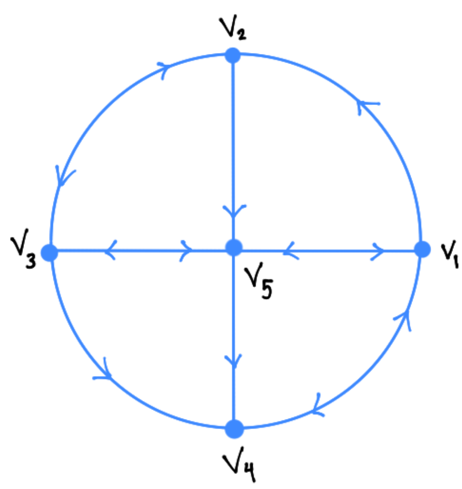
Teorema 1 (Identificando ciclos). *Sea s_{ij}^3 la entrada (i, j) de S. Entonces un vértice v_i pertence a un ciclo si y solo si $s_{ii}^3 \neq 0$. Donde $(s_{ij})^3 = S^3 = S \cdot S \cdot S$.*

Ejercicio 1. *Para cada una de las gráficas dadas*

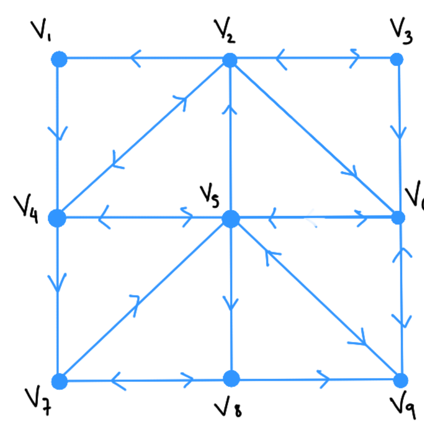
(a) Construir la matriz de adyacencias M.

(b) Construir la matriz S.

(c) Determinar los ciclos de cada gráfica.



(a)



(b)

Figura 1: Gráficas dirigidas

Algebra Lineal I.

(5o. Examen)

II. Cadenas de Markov

Definición 4. *Una* **cadena de Markov***, es un proceso estocástico a tiempo discreto* $\{X_n : n = 0, 1, \dots\}$*, con espacio de estados discretos, y que satisface la propiedad de Markov; es decir, para cualquier entero* $n \geq 0$ *y cualesquiera estados* $x_0, \dots, x_{n+1}$*, secumple*

$$P(x_{x_{n+1}|x_0,\dots,x_n}) = P(x_{n+1}|x_n)$$

A la probabilidad $P(X_{n+1} = j|X_n = i)$ *de pasar del estado* i *al estado* j *en el tiempo* $n+1$ *se le denota por* $p_{ij}(n, n+1)$*. Una* **matriz de transición** *es la matriz* $P = [p_{ij}(n, n+1)]$*. Esta matriz cumple que*

(a) $p_{ij} \geq 0$*,*

(b) $\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$*.*

Teorema 2. *Si* P *es la matriz de transición de una cadena de Markov y* $x_{(n)}$ *es el estado al tiempo* n*, entonces* $x_{(n+1)} = Px_{(n)}$*.*

Definición 5. *Sea* P *una matriz de transición. Si* $P^n = Q$ *es tal que* $Q\,x = q$*, cuando* $n \to \infty$*, se dice que* q *es un* **estado estacionario** *de* P*.*

Teorema 3. *El estado estacionario* q *de una matriz de transición* P *es el único vector de probabilidad que satisface* $P\,q = q$*; es decir* $q \in \ker(P - I)$*.*

Ejercicio 2. *Considera la matriz de transición*

$$P = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.7 \\ 0.6 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.5 & 0.1 \end{bmatrix}$$

(a) Calcula los estados $x(1), x(2), x(3)$*, aproximados a tres decimales, tomando* $x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$*.*

(b) Encuentra los estados estacionarios de P*.*

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Unidad Cuajimalpa
Casa abierta al tiempo

Algebra Lineal I.
(5o. Examen)

III. Criptografía

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	0

Figura 2: Alfabeto para los Cifrados de Hill

Definición 6. *Si a es un elemento en $\mathbb{Z}_m$, entonces a^{-1} es su inverso multiplicativo (o recíproco) de a módulo m si $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a \equiv 1 \mod m$.*

$\mathbb{Z}_{26}$

a	1	3	5	7	9	11	15	17	19	21	23	25
a^{-1}	1	9	21	15	3	19	7	23	11	5	17	25

Corolario 1. *Una matriz A de tamaño $n \times n$ con entradas en $\mathbb{Z}_{26}$ es invertible módulo 26 si y solo si el residuo de $\det A \mod 26$ no es divisible por 2 o 13.*

Se usó la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, para encriptar los mensajes. De acuerdo a tu matrícula, desencripta el mensaje correspondiente. (Erratas: el mensaje indicado entre paréntesis es el cifrado corregido)

(3.1) ZMAMGZCCMN $\to$ { 209364055, 2173034790, 2183034855 } (JSIGCZIQGD)

(3.2) HRMXKKSRVO $\to$ { 2123065290, 2173034852, 2183077181 } (NJMROCCHPG)

(3.3) WLTBLVTM $\to$ { 2143030177, 2173034932, 2183077396 } (UVZNDPPM)

(3.4) OULDZWVDUL $\to$ { 2143067227, 2173070330, 2183077412 } (IYRTHKHDOX)

(3.5) AAKEJRLM $\to$ { 2143067290, 2173071542, 2183077476 } (AAKMLLXE)

(3.6) LWSWZKAJJE $\to$ { 2153068272, 2173071542, 2183077583 } (VWOQZEGLDC)

(3.7) LDVSDSDBSR $\to$ { 2153076587, 2173071702, 2183087874 } (RTREJMPXCH)

(3.8) GNKKHNDS $\to$ { 2153076658, 2173071917, 2183087963 } (UTOCTHJM)

(3.9) YIHIUEMDDS $\to$ { 2163071950, 2183034480, 2183087981 } (BESALYBJUO, QCHYAWQHJM)

(3.10) NMXGWXMYVO $\to$ { 2163071978, 2183034506, 2193035711 } (VGHACBEYPG)