Primer ejercicio de Quetzal U. O. Vargas H.

Quetzal U. O. Vargas H.

10

10.2

9

Verificar que si L: V -> W es una transformación lineal de un espacio vectorial V, de dimensión n, en un espacio vectorial W, entonces

nulidad (L) + rango (L) = dimension de V

para los siguientes transformaciones lineales.

a) $L(x,y) = (x+y, y)$

Para el kernel:

$$L\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} x+y &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

$\therefore$ la solución al sistema es el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

y su nulidad es <u>cero</u>

Todo vector en imagen(L) es de la forma $\begin{bmatrix} x+y \\ y \end{bmatrix}$

Esto puede escribirse:

$$x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ rango de $L = 2$

nulidad(L) + rango(L) = dimensión del dominio (L)

$$0 + 2 = 2$$

Sí cumple

b)

$$L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Para el Kernel:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

$(R_3)(-2) + R_1 \longrightarrow R_1$, $(R_3)(-1) + R_2 \longrightarrow R_2$

$$\begin{bmatrix} 0 & 5 & 7 \\ 0 & 5 & 7 \\ 2 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

$(R_2)\left(\frac{3}{5}\right) + R_3 \longrightarrow R_3$, $(R_2)(-1) + R_1 \longrightarrow R_1$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 7 \\ 2 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Matriz [illegible]

Así:

$$5y = -7z \qquad 2x = -\frac{1}{5}z$$

$$y = -\frac{7}{5}z \qquad x = -\frac{1}{10}z$$

$$y = -\frac{14}{10}z$$

Base para el Kernel:

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{10}z \\ -\frac{14}{10}z \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} \\ -\frac{14}{10} \\ 1 \end{bmatrix}$$

nulidad de L = 1

Ahora la imagen de L

$$\begin{matrix} 4x & -y & -z \\ 2x & 2y & 3z \\ 2x & -3y & -4z \end{matrix}$$

$$x\begin{bmatrix}4\\2\\2\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}-1\\2\\-3\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}-1\\3\\-4\end{bmatrix}$$

Tomando la matriz

$$\begin{bmatrix}0&0&0\\0&5&7\\2&0&\frac{1}{5}\end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{10}\begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix}+\frac{7}{5}\begin{bmatrix}0\\5\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\7\\\frac{1}{5}\end{bmatrix}\Rightarrow\frac{1}{10}\begin{bmatrix}4\\2\\2\end{bmatrix}+\frac{7}{5}\begin{bmatrix}-1\\2\\-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\3\\-4\end{bmatrix}$$

Vemos claramente que el tercer vector se puede expresar como combinación lineal de los otros 2, por lo tanto una base para L es:

$$\left\{\begin{bmatrix}4\\2\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\2\\-3\end{bmatrix}\right\}\quad\therefore\ \underline{\text{rango de } L=2}$$

nulidad (L) + rango (L) = dimensión dominio (L)

$$1 + 2 = 3$$

La dimensión de $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ es 3

<u>por lo tanto sí cumple</u>

c) Dimensión Dominio = 3

$L(x, y, z) = (x+y-z, x+y, y+z)$

para el Kernel:

$$\begin{aligned} &(1)\ x+y-z=0 & & (1)\ y=z-x \\ &(2)\ x+y=0 & \Longrightarrow & (2)\ y=-x \\ &(3)\ y+z=0 & & (3)\ y=-z \end{aligned}$$

Sustituyendo (2) y (3) en (1) tenemos.

$y = -y + y$

$\underline{y = 0}$

Lo que implica que (2) $x+y=0$ (3) $y+z=0$

$\underline{x=0}$ $\underline{z=0}$

$\therefore$ Solución al sistema: $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ nulidad de $L = 0$

Ahora la imagen:

$x + y - z$

$x + y$

$y + z$

Esto se puede escribir así:

$$x\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + z\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$$

Si queremos expresar el tercer vector como combinación lineal de los 2 primeros.

$x + y = -z$

$x + y = 0$

$y = z$

Esto no se puede solo que todos sean "cero" pero eso ya sería el Kernel

Si queremos expresar el segundo vector como combinación lineal de los otros 2:

Lo que está escrito en azul dice: “Lo mismo, sólo se puede si todos son iguales cero, pero eso ya es el kernel”.

$x - z = y$ Lo mismo, sólo se puede si todos
$x = y$ son iguales a cero y eso ya es
$z = y$ el Kernel

En resumén ningun vector de los 3 se puede expresar como combinación lineal de los otros 2 $\therefore$ los 3 vectores son base para la imagen $\therefore$ $\underline{\text{rango de } L = 3}$

nulidad de L + rango L = dimensión dominio(L)

$$\underline{0 + 3 = 3}$$

Sí cumple