Solución al ejercicio $H = \begin{pmatrix} 5 \\ 5.3 \\ 15 \end{pmatrix} \subset [4]$

15. Encuentre la representación matricial A_T de la transformación lineal T, nu T, Im T, v(T) y r(T). A siendo B_1 y B_2 son bases definidas.

T: R^2 --> R^3 definida mediante

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ 2x+y \\ y \end{pmatrix} \quad B1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}; \; B2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

$$T\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 2(2)+1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad T\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ 2(1)+2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{a}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

a = 1	a = 1	a = 1
-1 + 2b + 2(1/5) = 5	2b = 6-2/5 =28/5	b = 14/5
5c = 1	c = 1/5	c = 1/5

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathbf{d}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + e\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

d = -1	d = -1	d = -1
-(-1) + 2e + 2(2/5) = 4	2e = 3 - 4/5 = 11/5	e = 11/10
5f = 2	f = 2/5	f = 2/5

Los vectores generadores de la imagen de la transformación son:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 14/5 \\ 1/5 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 11/10 \\ 2/5 \end{bmatrix}$$

Linealmente independientes

Por lo tanto, la matriz de la transformación T: R^2 --> R^3 con respecto a las bases dadas es:

$$[T]^{3}_{2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 14/5 & 11/10 \\ 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$$

Así el Rango de T = dimensión de la imagen de T = dim Im T = **2**

Considerando que los vectores generadores de la imagen son linealmente independientes, entonces la Nulidad de T = 0

El espacio nulo de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 14/5 & 11/10 \\ 1/5 & 2/5 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} X1 \\ X2 \\ X3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pero dado que estos vectores son linealmente independientes, resulta que el espacio nulo de **[T] = {0}**