(10, 10.2, 12) c [6]

Sea $L: P_3 \to P_3$ la transformación lineal definida como

$$L(at^3 + bt^2 + ct + d) = (a-b)t^3 + (c-d)t$$

a) ¿ $t^3 + t^2 + t - 1$ está en nucleo (L)?

tenemos que

$a = 1$ $\quad$ $c = 1$

$b = 1$ $\quad$ $d = -1$

$$\Rightarrow L(t^3 + t^2 + t - 1) = (1-1)t^3 + (1+1)t$$
$$= (0)t^3 + (2)t$$
$$= 2t$$

como $2t \neq 0$

$t^3 + t^2 + t - 1$ no está en el núcleo de L.

b) ¿ $t^3 - t^2 + t - 1$ está en núcleo (L)?

$a = 1$ $\quad$ $c = 1$

$b = -1$ $\quad$ $d = -1$

$$\Rightarrow L(t^3 - t^2 + t - 1) = (1+1)t^3 + (1+1)t$$
$$= (2)t^3 + (2)t$$
$$= 2t^3 + 2t$$

como $2t^3 + 2t \neq 0$

$t^3 - t^2 + t - 1$ no está en el núcleo de L

c) ¿ $3t^3 + t$ está en img (L)?

El vector $3t^3 + t$ está en Im (L) sí podemos determinar un vector $at^3 + bt^2 + ct + d$ en P_3 tal que

$$L(at^3 + bt^2 + ct + d) = 3t^3 + t$$

Como $L(at^3+bt^2+ct+d)=(a-b)t^3+(c-$
tenemos que

$$(a-b)t^3+(c-d)t = 3t^3+t$$

podemos escribir el lado izquierdo de esta ecuación como:

$$(a-b)t^3+(c-d)t+bt^2+d = 3t^3+t$$

$$\Rightarrow (a-b)=3 \quad \Rightarrow \quad a-0=3$$
$$(c-d)=1 \qquad\qquad c-0=1$$
$$b=0$$
$$d=0$$

$\therefore\ a=3\ ,\ c=1\ ,\ b=0\ \text{y}\ d=0$

Como este sistema tiene solución, el vector dado sí está en $Im(L)$

d) ¿$3t^3-t^2$ esta en $Im(L)$?
Podemos resolverlo de manera similar al inciso anterior.

Como $L(at^3+bt^2+ct+d)=(a-b)t^3+(c-d)t$
tenemos que

$$(a-b)t^3+(c-d)t = 3t^3-t^2$$

Podemos escribir del lado izquierdo

$$(a-b)t^3+(c-d)t+bt^2+d = 3t^3-t^2$$

$\Rightarrow (a-b) = 3$ $a = 3 - 1 = 2$
$(c-d) = 0$ $\Rightarrow$ $b = 1$
$b = -1$ $c = 0$
$d = 0$ $d = 0$

Como este sistema tiene solución el vector dado sí esta en $Im(L)$

e) Determine una base para nucleo (L)?.
El vector $at^3 + bt^2 + ct + d$ está en nucleo (L) si

$L(at^3 + bt^2 + ct + d) = 0$, es decir

$(a-b)t^3 + (c-d)t = 0$

$$\begin{array}{l} a-b = 0 \\ c-d = 0 \end{array} \Rightarrow \text{si} \quad \begin{array}{l} a = t \\ b = t \\ c = -t \\ d = -t \end{array}$$

tenemos

$$\begin{bmatrix} t \\ t \\ -t \\ -t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

de modo que una base para núcleo (L) es $\{t^3 + t^2 - t - 1\}$

f) Determine una base para Im (L)
utilizamos base canónica

$$L\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = t^3; \; L\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = t^2; \; L\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = t; \; L\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = t^2 + t$$

$Im(L) = \{(t^3, t^2, t, t^2 + t)\}$