$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 5.3 \\ 23 \end{pmatrix} \right\} \subset [4]$$

Encuentra la representación matricial A_T de la transformación lineal T, nu T, Im T, $v(T)$ y $p(T)$. A menos que se especifique otra cosa, suponga que B_1 y B_2 son bases canónicas.

23. $T: \mathbb{P}_4 \longrightarrow \mathbb{P}_3$; $P(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4)$

$= a_3x^3 + a_1x$

$B_1 = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ en $\mathbb{P}_4$

$B_2 = \{1, x, x^2, x^3\}$ en $\mathbb{P}_3$

Aplicamos T en la base B_1

$$(T(1))_{B_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (T(x))_{B_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (T(x^2)) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(T(x^3))_{B_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (T(x^4))_{B_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

así tenemos que:

$$A_T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Podemos ver que $Im(T)$ es:

$$Im(T) = Gen\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}, \text{ entonces } \rho(T) = 2.$$

Y tenemos que $\nu(T) = 5 - 2 = 3$

Como la $Im(T) = Gen\{x, x^3\}$, entonces a_0, a_2 y a_4 son arbitrarias, por lo que

$$Nucleo(T) = Gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$