2.2.1_3 Libro 2. Lilian Mejía Lechuga.

3. $T: R^2 \to R^3 \quad T(a_1, a_2) = (a_1 + a_2, 0, 2a_1 - a_2)$

Demostrar que T es una transformación lineal
Tenemos que: $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ y $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$
\begin{aligned}
T(\alpha x + y) &= T(\alpha(x_1, x_2) + (y_1, y_2)) \\
&= T((\alpha x_1, \alpha x_2) + (y_1, y_2)) \\
&= T(\alpha x_1 + y_1, \alpha x_2 + y_2) \\
&= ((\alpha x_1 + y_1) + (\alpha x_2 + y_2), 0, (2(\alpha x_1 + y_1) - (\alpha x_2 + y_2)) \\
&= \alpha(x_1 + x_2, 0, 2x_1 - x_2) + (y_1 + y_2, 0, 2y_1 - y_2) \\
&= \alpha T(x_1, x_2) + T(y_1, y_2).
\end{aligned}
$$

$\therefore$ T es lineal

Ahora veremos $N(T)$ y $R(T)$.
Tenemos que: $x = (x_1, x_2) \in N(T)$:

$$
\begin{aligned}
0 = T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 0, 2x_1 - x_2) &\to \\
x_1 + x_2 = 0 \quad , \quad 2x_1 - x_2 = 0 &\to \\
x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = 0
\end{aligned}
$$

Con esto se concluye que $N(T) = \{0\}$, de tal forma que la base para $N(T)$ sería $\{0\}$.

Nos fijamos en el espacio de la imagen.
En general, lo que hacemos es tomar una base del dominio y luego transformar cada uno de estos elementos básicos por T para ver lo que tenemos.
Entonces dejemos que:

β = Sea la base canónica para $\mathbb{R}^2$

i.e $\quad \beta = \{(1,0), (0,1)\}$

$$
\begin{aligned}
T(1,0) &= (1,0,2) \\
T(0,1) &= (1,0,-1)
\end{aligned}
$$

$\therefore$ $R(T) = \{(1,0,2), (1,0,-1)\}$

Ya que estos dos vectores son L.I.
Se concluye que esto es una base para $R(T)$

$\therefore$ Ya que se calculo $N(T)$ y $R(T)$, decimos que lo nulidad $(T) = \dim(N(T)) = 0$ y Rango $(T) = \dim(R(T)) = 2$.

Esto es consistente con la dimensión:

$$\dim(\mathbb{R}^2) = \text{nulidad}(T) + \text{rango}(T)$$
$$2 = 0 + 2.$$

Por último, dado que $N(T) = \{0\}$, y según el Teorema 2.4 T es inyectivo.
Ahora desde el rango el espacio es $\mathbb{R}^3$, que tiene una dimension mayor que la del espacio de dominio.

Theorem 2.4. *Let* V *and* W *be vector spaces, and let* $\mathsf{T}\colon \mathsf{V} \to \mathsf{W}$ *be linear. Then* T *is one-to-one if and only if* $\mathsf{N}(\mathsf{T}) = \{\mathit{0}\}$.

Proof. Suppose that T is one-to-one and $x \in \mathsf{N}(\mathsf{T})$. Then $\mathsf{T}(x) = \mathit{0} = \mathsf{T}(\mathit{0})$. Since T is one-to-one, we have $x = \mathit{0}$. Hence $\mathsf{N}(\mathsf{T}) = \{\mathit{0}\}$.

Now assume that $\mathsf{N}(\mathsf{T}) = \{\mathit{0}\}$, and suppose that $\mathsf{T}(x) = \mathsf{T}(y)$. Then $\mathit{0} = \mathsf{T}(x) - \mathsf{T}(y) = \mathsf{T}(x - y)$ by property 3 on page 65. Therefore $x - y \in \mathsf{N}(\mathsf{T}) = \{\mathit{0}\}$. So $x - y = \mathit{0}$, or $x = y$. This means that T is one-to-one. ∎

The reader should observe that Theorem 2.4 allows us to conclude that the transformation defined in Example 9 is not one-to-one.

Surprisingly, the conditions of one-to-one and onto are equivalent in an important special case.