4.5.19 Lilian Mejía Lechuga

Sea $T_A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sea la multiplicación por A y encuentre la dimensión del subespacio de R^3 que consiste en todos los vectores x para los cuales $T_A(x) = 0$.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ Tomamos $x = (x_1, x_2, x_3) \in S$

Tenemos que:

$$T_A(x) = 0$$

Como $T_A(x) = Ax = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_3 \\ x_1 + x_3 \end{bmatrix}$

$x_1 + x_2 = 0$

$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{array}\right\} \to$ Son iguales

Entonces tenemos $x_2 = -x_1$, $x_3 = -x_1$

Así tenemos $x = (x_1, -x_1, -x_1) = x_1(1, -1, -1)$ y tenemos este intervalo $x \in \{(1,-1,-1)\}$ y por lo tanto $S \subset \{(1,-1,-1)\}$.

Observemos también que dado cualquier $x = (\alpha, -\alpha, -\alpha) \in \{(1,-1,-1)\}$, con esto tenemos que:

$T_A(x) = Ax = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ -\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha - \alpha \\ \alpha - \alpha \\ \alpha - \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ lo que nos

da que $x \in S$ y $\therefore$ abarca $\{(1,-1,-1)\} \subset S$.

$\therefore S = \{(1,-1,-1)\}$ y $\therefore \{(1,-1,-1)\}$ es una base para S que nos da $\dim(S) = 1$.