$I = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2_0 \, 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

2: $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$: $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ 2z \end{pmatrix}$

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}\right) = T\begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \\ z_1+z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_1+x_2)-(y_1+y_2) \\ 2(z_1+z_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+x_2-y_1-y_2 \\ 2z_1+2z_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1-y_1 \\ 2z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2-y_2 \\ 2z_2 \end{pmatrix}$$

Pero $T\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1-y_1 \\ 2z_1 \end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2-y_2 \\ 2z_2 \end{pmatrix}$, entonces

$$T\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\right] = T\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$ $\therefore$ Es una transformación lineal

Ahora busquemos bases para $Im(T)$ y $Ker(T)$

$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, tenemos la matriz

$A_T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ como A es una matriz de 2×3 tenemos

$Ran(A) + Null(A) = 3$

Pero A_T tiene 2 pivotes, entonces $Ran(A) = 2$

$Im\,T = gen\{(1,-1,0),(0,0,2)\}$ Es un plano xy

$Ker(A) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow 2z=0 \Rightarrow z=0$, $x=y$; $z=0$

$\begin{pmatrix} y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Ker(A) = gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

$null(A) = 1$

Además $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ no es inyectiva, ya que $Ker(t) \neq \{0\}$, pero es sobreyectiva, dado que $Im(T) = W$