$c = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2.6 \\ 28 \end{pmatrix} \right\}$ Encontrar $Im(T)$ y $Ker(T)$ de:

(a) $T(v_1, v_2) = (v_2, v_1)$

Consideramos $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \in \mathbb{R}^2$

$T(v_1, v_2) = v_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

Consideramos $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

luego $Im(T) = Gen(T(\beta)) = Gen\left(\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right)$

es fácil ver que el conjunto es linearmente independiente por lo tanto forma una base para $Im(T)$

Consideramos $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = 0 \\ v_2 = 0 \end{cases}$

Por lo tanto $Ker(T)$ es el vector de la forma $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ⌟,

b) $T(v_1, v_2, v_3) = (v_1, v_2)$

Consideramos $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \in \mathbb{R}^3$

$T(v_1, v_2, v_3) = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + v_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

Consideramos $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

↖ es combinación lineal de los otros dos

luego $Im(T) = Gen(T(\beta)) = Gen\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right)$

es fácil ver quel conjunto es linealmente independirnte y que forma una base para $Im(T)$

Consideramos $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = 0 \\ v_2 = 0 \end{cases}$

Por lo tanto $Ker(T)$ son los vectores de la forma $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_3 \end{pmatrix}$ ⌟,

c) $T(v_1, v_2) = (0,0)$

Consideramos $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \in \mathbb{R}^2$

$T(v_1, v_2) = v_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

consideramos $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

luego $Im(T) = Gen(T(\beta)) = Gen\left(\left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right\} \right)$

Fácilmente podemos observar que es una base de $I(T)$ y que $Ker(T)$ esta formado por los vectores de la forma $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \perp$,

d) $T(v_1, v_2) = (v_1, v_1)$

Consideramos $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \in \mathbb{R}^2$

$T(v_1, v_2) = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

Consideramos $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$Im(T) = Gen(T(B)) = Gen\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right)$

el conjunto es linealmente independiente y forma una base para $Im(T)$.

Consideremos $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Reduciendo

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \{ v_1 = 0$

Por lo tanto $Ker(T)$ son los vectores de la forma $v = \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix} \perp$,