$B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2.1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ Demostrar que T es una transformación lineal, encontrar $Im(T)$, $Ker(T)$, nulidad, rango y determinar si es inyectiva o sobreyectiva.

$T: R^3 \to R^2$ definida como $T(a_1, a_2, a_3) = (a_1 - a_2, 2a_3)$

Verificamos que es una transformación lineal

Sea $v, u \in \mathbb{R}^3$ con $v = (v_1, v_2, v_3)$, $u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$

$$T(v+u) = T[(v_1, v_2, v_3) + (u_1, u_2, u_3)]$$
$$= T[v_1 + u_1, v_2 + u_2, v_3 + u_3]$$
$$= [(v_1 + u_1) - (v_2 + u_2), 2(v_3 + u_3)$$
$$= (v_1 + u_1 - v_2 - u_2, 2v_3 + 2u_3)$$
$$= (v_1 - v_2, 2v_3) + (u_1 - u_2, 2u_3)$$
$$= T(v_1, v_2, v_3) + T(u_1, u_2, u_3)$$
$$= T(v) + T(u)$$

- - - - -

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ con $v = (v_1, v_2, v_3) \in R^3$

$$\alpha v = (\alpha v_1, \alpha v_2, \alpha v_3)$$
$$T(\alpha v) = (\alpha v_1 - \alpha v_2, 2\alpha v_3)$$
$$= \alpha(v_1 - v_2, 2v_3)$$
$$= \alpha T(v_1, v_2, v_3) = \alpha T(v)$$

Por lo tanto T es una transformación lineal

- - - -

Consideremos $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \in \mathbb{R}^3$

$$T(a_1, a_2, a_3) = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Consideremos

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

↳ es combinación lineal de las otras dos

luego $Im(T) = Gen(T(\beta)) = Gen\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \right)$

Facilmente podemos ver que el conjunto anterior es linealmente independiente por lo tanto forma una base para la $Im(T)$. El rango de T es 2.

Consideremos

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ a_3 = 0 \end{cases}$$

Por lo tanto el $Ker(T)$ son los vectores de la forma

$$a = \begin{pmatrix} a_2 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La nulidad de T es 1

$$null(T) + ran(T) = 3 = dim(V)$$

$Ker(T) \neq \{0\}$ por lo tanto no es inyectiva

por lo tanto no es supra yectiva.