UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo
Unidad Cuajimalpa

Algebra Lineal I.

Aplicaciones

Cadenas de Markov

Figura 1: Andréi Adréyevich Márkov

Supongamos que la población de una ciudad y sus alrededores es censada cada año, se tiene el vector

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0.60 \\ 0.40 \end{bmatrix} \tag{1}$$

donde la primer coordenada corresponde al porcentaje de gente que vive en la cuidad y la segunda corresponde al porcentaje de gente que vive en los alrededores. Nótese que la suma es 1, es decir el 100 % de la población.

Definición 1. *Un vector de coordenadas mismas que suman 1, lo llamaremos* **vector de probabilidad**. *Una matriz cuyas columnas son vectores de probabilidad la llamaremos* **matriz estocástica**. *Una* **cadena de Markov** *es una sucesión de vectores de probabilidad* $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \ldots,$ *junto con una matriz estocástica* P, *tales que*

$$\mathbf{x}_1 = P\mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}_2 = P\mathbf{x}_1 \quad , \mathbf{x}_3 = P\mathbf{x}_2, \ldots \tag{2}$$

Podemos describir una cadena de Markov como una ecuación en diferencias de primer orden

$$\mathbf{x}_{k+1} = P\mathbf{x}_k \qquad \textit{para } k = 0, 1, 2 \ldots \tag{3}$$

En este contexto $\mathbf{x}_k$ *es conocido como* **vector de estado**.

Ejemplo 1. *Consideremos el movimiento de la población de la ciudad a los alrededores. La migración anual entre estas dos entidades está governada por la matriz de migración*

$$M = \begin{bmatrix} 0.95 & 0.03 \\ 0.05 & 0.97 \end{bmatrix} \tag{4}$$

¿Cuál fue la distribución de población en 2015 y 2016?

Aplicaciones

Ejemplo 2. *Supongamos que los resultados de la votación para el congreso local está representado por un vector en* $\mathbb{R}^3$

$$M = \begin{bmatrix} \text{\% DE VOTOS - MORENA} \\ \text{\% DE VOTOS - PRI} \\ \text{\% DE VOTOS - PAN} \end{bmatrix} \tag{5}$$

Suponiendo que se registran los resultados de las elecciones cada dos años con un vector de este tipo donde estos resultados dependen solamente de los resultados de la elección anterior. supongamos que la matriz de transición de las votaciones está dada por

$$P = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.3 \\ 0.2 & 0.8 & 0.3 \\ 0.1 & 0.1 & 0.4 \end{bmatrix} \tag{6}$$

Partiendo con unos resultados dados por

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0.55 \\ 0.40 \\ 0.05 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Determina como serán los resultados para los siguientes dos periodos electorales.

Ejemplo 3. Prediciendo el Futuro. *Considera la matriz estocástica*

$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.0 & 0.4 \end{bmatrix} \text{ y el vector } \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix} \tag{8}$$

Supongamos que el estado de un sistema se rige por la cadena de Markov $\mathbf{x}_{k+1} = P\mathbf{x}_k$, *para* $k = 0, 1, 2, \ldots$ *¿ Qué pasará con el sistema cuando el tiempo transcurre? digamos* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{15}$.

Definición 2. *Si* P *es una matriz estocástica, un* **estado estacionario** *de* P *es un vector de probabilidad* $\mathbf{x}$ *tal que*

$$P\mathbf{x} = \mathbf{x}, \ \text{equivalentemente } (P - I)\mathbf{x} = 0. \tag{9}$$

Ejemplo 4. *Hallar los estados estacionarios de*

$$P = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.6 \\ 0.9 & 0.4 \end{bmatrix} \tag{10}$$