Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Unidad Cuajimalpa

Algebra Lineal I.

Aplicaciones

Matriz de Casorati

Dadas tres señales en $\mathbb{S}$, digamos $\{u_k\}$, $\{v_k\}$, $\{w_k\}$. Un criterio para determinar si son linealmente independientes o no, es analizar la matriz de Casorati, dada por

$$\begin{bmatrix} u_k & v_k & w_k \\ u_{k+1} & v_{k+1} & w_{k+1} \\ u_{k+2} & v_{k+2} & w_{k+2} \end{bmatrix}$$

Si la matriz de Casorati es singular, las señales asociadas pueden ser o no linealmente dependientes (por ejemplo, si tomamos $y_k = k^2$ y $z_k = 2k|k|$). sin embargo, si todas las señales son solución del mismo sistema homogéneo de ecuaciones en diferencias, se tiene que la matriz de Casorati es invertible para toda k y las señales son linealmente independientes o bien la matriz de Casorati es singular y las señales son linealmente dependientes.

Definición 1. *Dados escalares $a_0, \dots, a_n$, con a_0 y a_n distintos de cero, y una señal $\{z_k\}$, la ecuación*

$$a_0 y_{k+n} + a_1 y_{k+n-1} + \cdots + a_{n-1} y_{k+1} + a_n y_k = z_k, \text{ para toda } k$$

se denomina **ecuación lineal en diferencias** (o ecuación de relación de recurrencia) de orden n. Por simplicidad, el coeficiente a_0 se toma con valor 1. Si la sucesión $z_k = 0$ para toda k, entonces es una ecuación homgénea.

Ejemplo 1. *En procesamiento de señales, una ecuación en diferencias como en la definición, describe un filtro lineal, donde $a_0, \dots, a_n$ corresponden a los coeficientes del filtro. Supongamos que se alimenta con dos señales un filtro*

$$\frac{y_{k+2}}{2\sqrt{2}} + \frac{y_{k+1}}{2} + \frac{y_k}{2\sqrt{2}} = z_k$$

o bien podemos escribir

$$0.35 y_{k+2} + 0.5 y_{k+1} + 0.35 y_k = z_k$$

Analizar la ecuación.

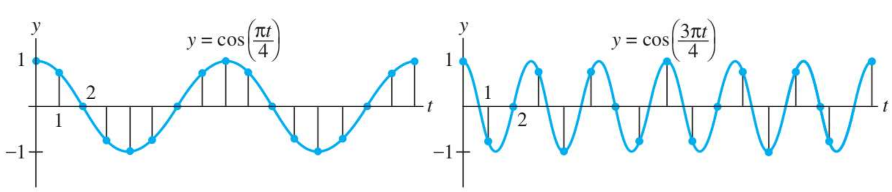

Figura 1: Dos señales distintas en un filtro

Ejemplo 2. *Generalmente las soluciones de una ecuación en diferencias homogénea tienen la forma $y_k = r^k$, para alguna k entero. Hallar algunas soluciones de la ecuación*

$$y_{k+3} - 2y_{k+2} - 5y_{k+1} + 6y_k = 0, \text{ para toda } k.$$

Aplicaciones

Conjuntos solución de ecuaciones lineales en diferencias

Considera una función $T : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$, la cual transforma la señal $\{y_k\}$ en la señal $\{w_k\}$, mediante

$$w_k = y_{k+n} + a_1 y_{k+n-1} + \cdots + a_{n-1} y_{k+1} + a_n y_k \tag{1}$$

No es difícil ver que T es una transformación lineal. En consecuencia, el conjunto solución de la ecuación homogénea

$$y_{k+n} + a_1 y_{k+n-1} + \cdots + a_{n-1} y_{k+1} + a_n y_k = 0 \text{ para toda } k \tag{2}$$

corresponde al kernel de T, por lo que es un subespacio de $\mathbb{S}$. Cualquier combinación lineal de soluciones es de nuevo una solución.

Teorema 1. *Si $a_n \neq 0$ y si $\{z_k\}$ es dada, la ecuación*

$$y_{k+n} + a_1 y_{k+n-1} + \cdots + a_{n-1} y_{k+1} + a_n y_k = z_k \text{ para toda } k \tag{3}$$

tiene una única solución siempre que $y_0, \ldots, y_{n-1}$ estén especificados.

Teorema 2. *El conjunto H de todas las soluciones de una ecuación lineal homogénea en diferencias de orden n*

$$y_{k+n} + a_1 y_{k+n-1} + \cdots + a_{n-1} y_{k+1} + a_n y_k = 0 \text{ para toda } k \tag{4}$$

es un espacio n- dimesional.

Ejemplo 3. *Encuentra una base para el conjunto de soluciones de la ecuación en diferencias*

$$y_{k+3} - 2y_{k+2} - 5y_{k+1} + 6y_k = 0$$