

GRUPO

Definición 1. *Un grupo consiste en lo siguiente*

1. *Un conjunto G ;*
2. *Una operación (o regla de correspondencia) la cual asocia pares de elementos $x, y \in G$ un elemento $xy \in G$ tal que*
 - i. *$x(yz) = (xy)z$, para toda $x, y, z \in G$;*
 - ii. *Existe un elemento neutro e , tal que $ex = xe = x$, para toda $x \in G$*
 - iii. *A cada elemento $x \in G$ le corresponde un elemento x^{-1} en G tal que $xx^{-1} = x^{-1}x = e$.*

Ejemplo 1. *El espacio de matrices $M_{n \times n}$ no singulares, forman un grupo con la multiplicación de matrices.*

Ejemplo 2. *El conjunto de matrices de permutación P forman un grupo con el producto de matrices.*

Ejemplo 3. *El conjunto de transformaciones lineales $\mathcal{L}(V)$ forma un grupo con la composición de funciones.*

INVERTIBILIDAD

Definición 2. *Sean V y W espacios vectoriales, sea $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal. Una función $U : W \rightarrow V$ es una inversa de T si $TU = I_W$ y $UT = I_V$. Si T tiene una inversa entonces T es invertible.*

ISOMORFISMO

Definición 3. *Si V y W son espacios vectoriales sobre un campo \mathbb{F} , y si existe una transformación lineal $T : V \rightarrow W$ biyectiva, entonces T es un **isomorfismo** de V en W .*

Teorema 1. *Todo espacio vectorial, definido en un campo F , finito dimensional con $\dim(V) = n$, es isomorfo a \mathbb{F}^n*

Ejemplo 4. $\mathbb{P}_{n-1} \cong \mathbb{R}^n$, es decir, el espacio de polinomios de grado $n - 1$ es isomorfo a \mathbb{R}^n

Ejemplo 5. $M_{2 \times 2} \cong \mathbb{R}^4$, es decir, el espacio de matrices cuadradas de 2×2 es isomorfo a \mathbb{R}^4

Aplicaciones

Señales a tiempo discreto

Ejemplo 6. Considera el espacio vectorial \mathbb{S} de sucesiones doblemente infinitas, es decir

$$\{y_k\} = \{\dots, y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, y_2, \dots\}$$

donde y_k está definida en los enteros y es visualizada como sucesión de números. Digamos $y_k = 0.7^k$, $y_k = 1^k$, $y_k = (-1)^k$, como se muestran en las figuras

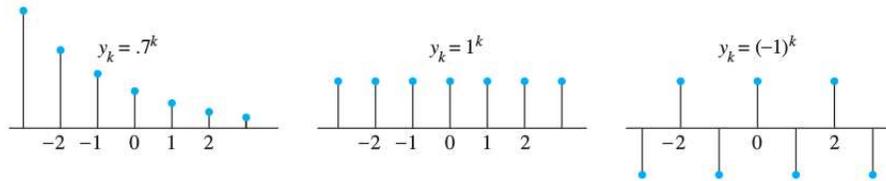


Figura 1: Tres señales distintas elementos de \mathbb{S}

El sonido tipo “claro como cristal” de un CD, se produce a partir de un track de música que ha sido muestreado a una razón de 44,100 veces por segundo.