UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo
Unidad Cuajimalpa

Algebra Lineal I.

Teorema 1. *Sea V un espacio vectorial tal que $\dim(V) = n < \infty$; sea $T : V \to V$ una trasformación lineal y sea A la matriz asociada a dicha transformación. Si $A^1, \ldots, A^n$ son los vectores columna de A, entonces A es invertible si y solo si $\{A^1, \ldots, A^n\}$ son vectores linealmente independientes.*

Nota 1. *Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(i) *A es no singular*

(ii) *$x = 0$ es solución única para la ecuación $Ax = 0$*

(iii) *A es equivalente por renglones a I*

(iv) *El sistema de ecuaciones $Ax = b$, tiene solución única para cada b*

(v) $\det(A) \neq 0$

(vi) *A tiene rango n*

(vii) *A tiene nulidad cero*

(viii) $\ker(A) = \{0\}$

(ix) *Las columnas de A forman un conjunto linealmente independiente en $\mathbb{R}^n$*

(x) *Los renglones de A forman un conjunto linealmente independiente en $\mathbb{R}^n$*

(xi) *La transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por $T(x) = Ax$, con $x \in \mathbb{R}^n$, es biyectiva.*

Ejemplo 1. *Hallar una base para el espacio de soluciones de los sistemas de ecuaciones lineales homogéneos*

$$\left.\begin{array}{rcl} x - 3y + z &=& 0 \\ 2x - 6y + 2z &=& 0 \\ 3x - 9y + 3z &=& 0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{rcl} x - 4y + 3z - w &=& 0 \\ 2x - 8y + 6z - 2w &=& 0 \end{array}\right\}$$

Ejemplo 2. *Considera la tranformación lineal*

$$T = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{bmatrix}$$

Hallar una base para el espacio nulo

Espacio Columna

Definición 1. *Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. El* **espacio columna** *de A, que denotaremos por $\mathrm{Col}(A)$, es el conjunto de todas las combinaciones lineales de las columnas de A. Si $A = [A^1 \cdots A^n]$, entonces*

$$\mathrm{Col}(A) = \mathrm{Gen}\left\{A^1, \ldots, A^n\right\}$$

Ejemplo 3. *Hallar una matriz A tal que $V = \text{Col}(A)$, donde*

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} 6x - y \\ x + y \\ -7x \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

Teorema 2. *Sean V, W y Z espacios vectoriales de dimensión finita con bases ordenadas α, β, γ respectivamente. Sean $L : V \to W$ y $T : W \to Z$, transformaciones lineales. Entonces*

$$[TL]_{\alpha}^{\gamma} = [T]_{\alpha}^{\beta}[L]_{\beta}^{\gamma}$$

Ejemplo 4. *Sea $T : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_2$ y $L : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_3$, transformaciones lineales, dadas respectivamente por*

$$T(f) = f'(x) \qquad\qquad L(f) = \int_0^x f(t)\, dt$$

Unsando las bases canónicas, determinar $[T]_{\alpha}^{\beta}$, $[L]_{\beta}^{\alpha}$ y $[TL]_{\beta}$.

Ejemplo 5. *Sea T una transformación lineal en $\mathbb{R}^2$ definida mediante*

$$T(x_1, x_2) = (x_1, 0)$$

Sean $\mathfrak{B} = \{e_1, e_2\}$, la base canónica y $\mathfrak{B}' = \{(1, 1), (2, 1)\}$. Determinar $[T]_{\mathfrak{B}}$ y $[T]_{\mathfrak{B}'}$.

Ejemplo 6. *Sea $D : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_3$, dada por $D(f) = D_x f$. Considera las bases*

$$\begin{aligned} \mathfrak{B} &= \{f_1, f_2, f_3, f_4\}, \quad \text{con } f_i(x) = x^{i-1} \\ \mathfrak{B}' &= \{g_1, g_2, g_3, g_4\}, \quad \text{con } g_i(x) = (x + t)^{i-1},\ t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Hallar $[D]_{\mathfrak{B}}$ y $[D]_{\mathfrak{B}'}$.