Ejercicio 3.5 de Orión

3.5 Muestra si este conjunto es linearmente independiente

$$\left\{\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2 & 1\\ 4 & 2\end{bmatrix}\right\} \subset M_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

Sean $w, x, y, z \in \mathbb{R}$

se tiene:

$$w\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix} + x\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}0 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix} + z\begin{bmatrix}2 & 1\\ 4 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

Esto es:

(1) $w + x + 2z = 0$

(2) $w + 3y + z = 0$

(3) $w + y + 4z = 0$

(4) $2w + 2x + 2y + 2z = 0$

Ahora tomamos la matriz de coeficientes

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$(R_2)(-1)+R_1 => R_1$, $(R_2)(-1)+R_3 => R_3$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$(R_3)(\frac{1}{2}) -> R_3$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$R_3)(3)+R_2 => R_2$, $R_3)(2)+R_4 => R_4$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{11}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right]$$

$(R_1)(-2)+R_4 \Rightarrow R_4$,

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{11}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 2 & 0 & 6 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

$(R_2)(-2)+R_4 \Rightarrow R_4$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{11}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -11 & 0 \end{array}\right]$$

Así:

$$\begin{aligned}
&① & x - 3y + z &= 0 \\
&② & w \qquad + \tfrac{11}{2}z &= 0 \\
&③ & -y + \tfrac{3}{2}z &= 0 \\
&④ & -11z &= 0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad z \;\; 0$

Sustituyendo z en ② y ③:

$$w = 0$$

$$y = 0$$

Sustituyendo y y z en ①:

$$x = 0$$

$\therefore$ La solucion es $w=0, x=0, y=0, z0$, la solución trivial por lo tanto el conjunto es <u>linearmente independiente.</u>