3. Muestra que los siguientes conjuntos de vectores son linealmente independientes, de lo contrario escribe uno de los vectores como combinación lineal de los restantes

(3.5) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \right\} \subset M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

Tomamos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ y hacemos:

$$\alpha_1\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \alpha_4\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & 2\alpha_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_2 & 0 \\ 0 & 2\alpha_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3\alpha_3 \\ \alpha_3 & 2\alpha_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\alpha_4 & \alpha_4 \\ 4\alpha_4 & 2\alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1+\alpha_2+0+2\alpha_4 & \alpha_1+0+3\alpha_3+\alpha_4 \\ \alpha_1+0+\alpha_3+4\alpha_4 & 2\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3+2\alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \alpha_1+\alpha_2+ \quad +2\alpha_4&=0 \\ \alpha_1+ \quad +3\alpha_3+\alpha_4&=0 \\ \alpha_1+ \quad +\alpha_4+4\alpha_4&=0 \\ 2\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3+2\alpha_4&=0 \end{aligned} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Ahora reduciendo por Gauss-Jordan:

por Gauss-Jordan

$$\det A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\tfrac{1}{2}R_4 \rightarrow R_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\begin{matrix} R_1 - R_2 \rightarrow R_2 \\ R_3 - R_4 \rightarrow R_4 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{R_1 - R_3 = R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Ahora teniendo esa matriz tomaremos la 1era. columna para calcular su determinante

$$\det A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \cancel{0 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}} + \cancel{0 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}} - \cancel{0 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}}$$

Solo basta con calcular $1 \det \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} =$

$$= 1(-3-0) - 1(-9-0) - 1(6+1) = -3+9-7 = -10+4 = -1$$

Dado que el $\det A \neq 0$ entonces podemos concluir que es linealmente independiente