4. Muestra si los siguientes conjuntos forman una base para el espacio indicado.

(4.3) $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^4$

Procedemos a calcular la determinante de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para que nos sea más fácil al sacar las determinante, simplificamos la matriz de 4x4 por Gauss-Jordan

$\cancel{R_3 - R_4 \to R_4}$ $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Ahora tomaremos la columna 1 ya que tiene la mayor cantidad de 0's

Ahora sí sacamos la determinante

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \cancel{0 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \cancel{- 0 \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}} + 1 \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cancel{- 0 \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

Procedemos a sacar la determinante de $1 \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\operatorname{Det} A = 1 \det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= -1\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - 0\cancel{\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} = -1(2+1) + 1(\cancel{-2+2}) - 0 = -3 //$$

Dado que $\det A \neq 0$, entonces son linealmente independientes

Ahora sean $y_1, y_2, y_3, y_4 \in \mathbb{R}$, entonces:

$$y_1\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + y_3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y_4\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Entonces $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$$-y_2 + y_3 + 2y_4 = 0 \ldots (1)$$
$$y_2 + y_3 + y_4 = 0 \ldots (2)$$
$$y_1 + y_2 + 2y_4 = 0 \ldots (3)$$
$$-y_2 + y_4 = 0 \ldots (4)$$

Ahora sumamos (1) y (2)

$$\begin{array}{r} -\cancel{y_2} + y_3 + 2y_4 = 0 \\ + \quad \cancel{y_2} + y_3 + y_4 = 0 \\ \hline 2y_3 + 3y_4 = 0 \ldots (5) \end{array}$$

Y sumamos (2) y (4)

$$\begin{array}{r} \cancel{y_2} + y_3 + 2y_4 = 0 \\ + \quad -\cancel{y_2} \qquad + y_4 = 0 \\ \hline y_3 + 3y_4 = 0 \ldots (6) \end{array}$$

Tomamos (5) y (6) y las restamos

$$\begin{array}{r} 2y_3+3y_4=0 \\ -\quad y_3+3y_4=0 \\ \hline y_3+0=0 \end{array} \Rightarrow \boxed{y_3=0}$$

Sustituyendo $y_3=0$ en (1) y (2), y posteriormente sumando (1) y (2)

$$\begin{array}{l} -y_2+0+2y_4=0 \\ y_2+0+y_4=0 \end{array} \Rightarrow + \begin{array}{r} -\cancel{y_2}+2y_4=0 \\ \cancel{y_2}+y_4=0 \\ \hline 3y_4=0 \end{array} \Rightarrow \boxed{y_4=0}$$

Observando (4) tenemos que $-y_2+y_4=0 \Rightarrow y_4=y_2$

Entonces $\boxed{y_2=0}$

Y tomando (3) y sustituyendo $y_2=0$ y $y_4=0$

$$y_1+y_2+2y_4=0 \Rightarrow y_1+0+0=0 \Rightarrow \boxed{y_1=0}$$

Podemos concluir que $y_1=0$, $y_2=0$, $y_3=0$, $y_4=0$ y entonces es linealmente independiente, por lo tanto forma una base en $\mathbb{R}^4$ //