Ejercicio (4.3)

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^4$$

Se calcula el determinante. Convierto la matriz en una matriz triangular.

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{R_3 \longleftrightarrow R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} -R_1 + R_4 \longrightarrow R_4$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{R_2 + R_3 \longrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} R_3 \longleftrightarrow R_4$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \underset{\sim}{-R_2 + R_3 \longrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} 2R_3 + R_4 \longrightarrow R_4$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Multiplicamos la diagonal y nos da el det = 1.

Por lo tanto los vectores son linealmente independientes.

Tomamos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$

$$\alpha_1\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}+\alpha_2\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\2\end{bmatrix}+\alpha_3\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}+\alpha_4\begin{bmatrix}2\\1\\2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Escrito de otra forma:

$$\begin{bmatrix}0 & -1 & 1 & 2\\0 & 1 & 1 & 1\\1 & 1 & 0 & 2\\1 & 2 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\alpha_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Ahora la reducimos y podemos utilizar la matriz con la que calculamos el determinante.

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 2\\0 & 1 & 1 & 1\\0 & 0 & -1 & 2\\0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\alpha_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Así tenemos:

$$\begin{aligned}\alpha_1+\alpha_2 \qquad +2\alpha_4&=0\\ \alpha_2+\alpha_3+\alpha_4&=0\\ -\alpha_3+2\alpha_4&=0\\ -\alpha_4&=0\end{aligned} \Rightarrow$$

Si sustituimos α_4 en:

$\alpha_3 + 2(0) = 0$

tenemos que $\alpha_3 = 0$

Ahora sustitumos α_3 y α_4 en:

$\alpha_2 + 0 + 0 = 0$, tenemos que $\alpha_2 = 0$

Por último sustituimos α_2 y α_4 en:

$\alpha_1 + 0 + 2(0) = 0$, y tenemos que $\alpha_1 = 0$

así tenemos que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$

Entonces es linealmente independiente la matriz y forma una base en $\mathbb{R}^4$.