4.2) $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3$

Calculamos det (A)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \det(A) = 3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-1) \cancel{-2(0)} + 2(-1)$$

$$= -3 - 2$$

$$= -5$$

Como $\det(A) \neq 0$, eso quiere decir que son vectores linealmente independientes.

Sean $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$, resolvemos

$$x_1\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

esto es

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ll} 3x_1 - x_2 = 0 & \dots (1) \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 & \dots (2) \\ 2x_1 + x_2 - = 0 & \dots (3) \end{array}$$

Sumamos (1) y (2)

$$3x_1 \cancel{- x_2} = 0$$
$$2x_1 \cancel{+ x_2} = 0$$
$$5x_1 = 0 \longrightarrow \boxed{x_1 = 0}$$

Sustituimos el valor de x_1 en (3)

$$2x_1 + x_2 = 0$$
$$2(0) + x_2 = 0$$
$$\boxed{x_2 = 0}$$

Ahora sustituimos el valor de x_1 y x_2 en (2)

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$$
$$2(0) + 2(0) + x_3 = 0$$
$$\boxed{x_3 = 0}$$

Entonces, tenemos que

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

∴ Es linealmente independiente y forma una base para $\mathbb{R}^3$