Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Unidad Cuajimalpa

ALGEBRA LINEAL I.

Ejercicios de Repaso

Episodio II

15 de junio,2020.

Algebra Lineal I.

Episodio II

Nota 1. *Deberás enviar al foro "JUEGOS DEL HAMBRE", un problema resuelto y comentar tres publicaciones distintas de tus compañeros*

Espacios y subespacios vectoriales

1. En los siguientes ejercicios, determina si los conjuntos dados dotados con las operaciones de $\oplus$ y $\otimes$ son o no espacios vectoriales

(1.1) Sea H el conjunto de puntos dentro de un círculo en el plano.

$$H = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\Big\}$$

Con la operaciones usuales de $\mathbb{R}^2$

(1.2) Sea V el conjunto de las matrices $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tales que

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & a \end{bmatrix}$$

con las operaciones usuales de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(1.3) Sea V el conjunto de matrices $n \times n$ tales que su **traza** es igual a cero, es decir

$$V = \Big\{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) : \mathrm{Tr}A = a_{11} + \cdots + a_{nn} = 0\Big\}$$

(1.4) Considera el conjunto de funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, tal que para toda $t \in \mathbb{R}$ se tiene

$$f(-t) = \overline{f(t)}$$

donde la barra denota la conjugación compleja y la suma y producto por escalar usual de funciones, es decir

$$(f + g)(t) = f(t) + g(t), \qquad (cf)(t) = cf(t)$$

2. Verifica si los conjuntos dados H son o no subespacios vectoriales del espacio V.

(2.1) Sea $V = \mathbb{P}_n(x)$. H es el conjunto de polinomios de grado menor que n con coeficiente constante igual a cero.

(2.2) Sea $V = C[-\infty, \infty]$. H es el conjunto de funciones continuas $C[0, 1]$, tales que para $f \in C[0, 1]$, $f(0) = 0 = f(1)$.

(2.3) Sea $V = \mathbb{R}^2$. H es el conjunto de vectores $u = (u_1, u_2)$ en V tales que $u_1^3 + u_2^3 < 1$.

(2.4) Sea $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. H es el conjunto de matrices (a_{ij}), tales que $a_{21} = a_{12} = 0$.

(2.5) Sea $V = C^1[0, 1]$. H es el conjunto de funciones $f \in C^1[0, 1]$, tales que $f'(0) = 0$.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo
Unidad Cuajimalpa

Algebra Lineal I.

Episodio II

Dependencia Lineal y Bases

3. Muestra que los siguentes conjuntos de vectores son linealmente independientes, de lo contrario escribe uno de los vectores como combinación lineal de los restantes.

(3.1) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^2$;

(3.2) $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3$;

(3.3) $\{1-x, 1+x, x^2\} \subset \mathbb{P}_2(x)$;

(3.4) $\{-x, x^2-2x, 3x+5x^2\} \subset \mathbb{P}_2(x)$;

(3.5) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \right\} \subset M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

4. Muestra si los siguientes conjuntos forman una base para el espacio indicado.

(4.1) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^2$;

(4.2) $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3$;

(4.3) $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^4$;

(4.4) $\{t^3-t, t^3+t^2+1, t-1\} \subset \mathbb{P}_3(t)$;

(4.5) $\left\{ \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \right\} \subset M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Transformaciones lineales

5. Determina cuales de las siguientes transformaciones son lineales

(5.1) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, donde $F(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_3)$;

(5.2) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, donde $F(x_1, x_2) = x_1 x_2$;

(5.3) $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, donde $F(x) = (x, x, \ldots, x)$;

(5.4) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, donde $F(x_1, x_2) = (x_1^2, x_2^2)$;

(5.5) $F : \mathbb{P}_1(t) \to \mathbb{P}_2(t)$, donde $F(p(t)) = tp(t) + t^2 + 1$;

(5.6) $F : \mathbb{P}_2(t) \to \mathbb{P}_2(t)$, donde $F(at^2 + bt^2 + c) = (a+1)t^2 + (b-c)t + (a-c)$;

(5.7) $F : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$, donde $F(A) = A^t A$;

(5.8) $F : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, donde $F\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a-1 & b+1 \\ 2c & 3d \end{bmatrix}$;

(5.9) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, donde $F(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$