Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Unidad Cuajimalpa

Algebra Lineal I.

Resumen

Hasta ahora ya tenemos la noción de un espacio vectorial. El paso naturale es considerar funciones definidas en espacios vectoriales que preserven la estructura lineal. Este tipo de funciones se llaman **transformaciones lineales**. En cálculo las operaciones de derivación e integración son claros ejemplos de transformaciones lineales. Estas operaciones nos permiten reformular mucho problemas en ecuaciones diferenciales e integrales, en términos de trasformaciones lineales de espacios vectoriales particulares.
En geometría, las rotaciones, reflexiones y proyecciones proporcionan otro tipo de trasformaciones lineales, conocidas como transformaciones rígidas. En lo sucesivo, los espacios vectoriales que consideremos estarán definidos en un campo en común $\mathbb{R}$, a menos que se especifique lo contrario.

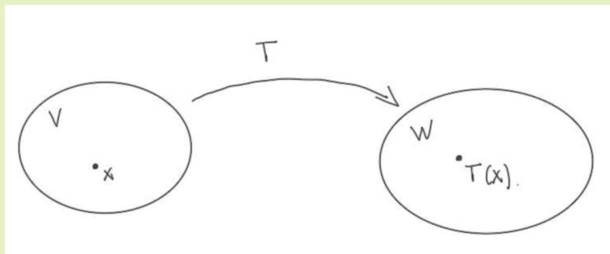

Figura 1: Transformación lineal. Dados V y W espacios vectoriales, la función $T : V \to W$, asigna a cada $x \in V$ un único elemento $w = T(x)$

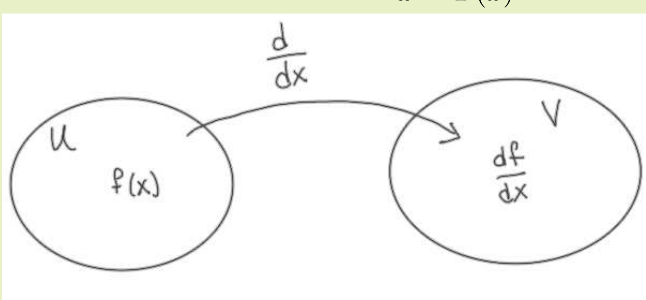

Figura 2: Operador diferencial

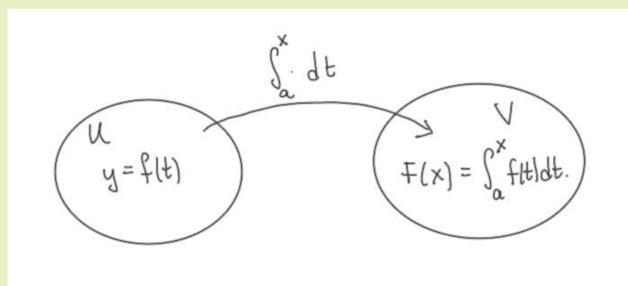

Figura 3: Operador integral

Los operadores de Derivación e Integración, toman valores en funciones y devuelven respectivamente la derivada y la integral de la función evaluada.

Transformación lineal

Definición 1. *Sean V y W espacios vectoriales, definidos en un campo $\mathbb{F}$. Sea $T : V \to W$ una función (con dominio en V y contradominio en W). Diremos que T es una* **transformación lineal** *(o bien operador lineal) de V en W, si para todas $x, y \in V$ y $c \in \mathbb{F}$ se cumplen*

(i) $T(x + y) = T(x) + T(y)$;

(ii) $T(c\,x) = c\,T(x)$.

Nota 1. *Nótese que las operaciones en el lado izquierdo de las identidades, se refieren a aquellas definidas en V, mientars que en el lado derecho las operaciones corresponden a las de W.*

Nota 2. *Las condiciones* (i) *y* (ii) *son lógicamente independientes, sin embargo se puede mostrar que:*

$$T(a\,x + b\,y) = aT(x) + bT(y), \ \text{con } a, b \in \mathbb{F}.$$

Proposición 1. *Sea $T : V \to W$, una transformación lineal, entonces se cumplen*

1. $T(0) = 0$;

2. $T(x - y) = T(x) - T(y)$, *para toda* $x, y \in V$;

3. *Para $x_1, x_2, \ldots, x_n \in V$ y escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, se tiene que*

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i T(x_i)$$

Ejemplo 1. *Si V es cualquier espacio vectorial, considera $T : V \to V$, la identidad definida como $T(x) = x$.*

Ejemplo 2. *Considera $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida de la siguiente manera $T(x_1, x_2) = (2x_2 + x_2, x_1)$.Es una transformación lineal.*

Ejemplo 3. *En Geometría se tienen las siguientes transformaciones*

1. Proyeccion, $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, *definida como* $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2)$;

2. Dilatación, $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, *definida como* $T(x) = \alpha\,x$, *con* $\alpha > 1$;

3. Contracción, $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, *definida como* $T(x) = \alpha\,x$, *con* $0 < \alpha < 1$;

4. Reflexión, $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, *definida como* $T(x_1, x_2) = (x_1, -x_2)$

5. Rotación, $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, *definida como* $T_\phi \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

Ejemplo 4. *Sea* $T : M_{m\times n}(\mathbb{R}) \to M_{n\times m}(\mathbb{R})$*, definida como* $T(A) = A^t$*, entonces* T *es una transformación lineal.*

Ejemplo 5. *Considera* $L : \mathbb{P}_n(x) \to \mathbb{P}_{n-1}(x)$*, definida como* $L[f(x)] = f'(x)$*, es decir,* L *devuelve la derivada de la función* f*.* L *es una transformación lineal.*

Ejemplo 6. *Sea* $V = C[\mathbb{R}]$*, el espacio de funciones continuas en los números reales. Sean* $a, b \in \mathbb{R}$*, con* $a < b$*. Define* $L : V \to \mathbb{R}$ *como*

$$L[f(t)] = \int_a^b f(t)dt$$

Es una transformación lineal. (Véase: `https://mathworld.wolfram.com/Functional.html` *)*

Teorema 1. *Sean* V *y* W *espacios vectoriales. Sea* $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *una base de* V*, y sean* $w_1, w_2, \ldots, w_n$ *elementos arbitrarios de* W*. Entonces existe una única transformación lineal* $T : V \to W$ *tal que*

$$T(v_1) = w_1, \ldots, T(v_n) = w_n.$$

Si $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{F}$*, entonces*

$$T(a_1v_1 + \cdots + a_nv_n) = a_1w_1 + \cdots + a_nw_n.$$

Espacio Nulo y Rango

Definición 2. *Sean* V *y* W *espacios vectoriales, sea* $T : V \to W$ *una transformación lineal.*

1. *El espacio nulo o* **kernel** *de* T *es el conjunto de todos los vectores* $v \in V$ *tales que* $T(v) = 0$*, es decir*

$$\ker(T) = \{v \in V : T(v) = 0\}$$

2. *El rango o* **imagen** *de* T *es el subconjunto de* W *que consiste en todos los elementos* $w \in W$ *tales que* $w = T(v)$*, es decir*

$$\mathrm{Im}(T) = \{w \in W : T(v) = w, v \in V\}$$

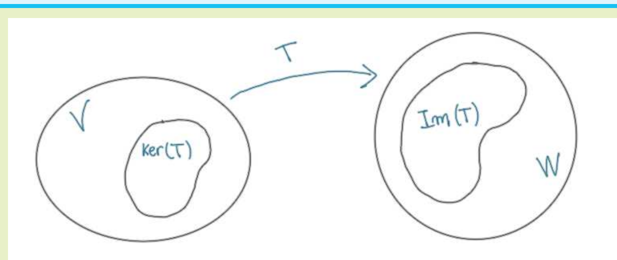

Figura 4: Núcle e Imagen de una transformación lineal.