Algebra Lineal I.

Espacio Vectorial

Definición 1. *Diremos que V es un* ***espacio vectorial*** *(o espacio lineal) sobre un campo $\mathbb{F}$ si consiste de un conjunto con dos operaciones definidas, suma y producto por escalares, donde a cada par de elementos $x, y \in V$ le corresponde un único elemento $x + y \in V$, y para cada $x \in V$ y $\alpha \in \mathbb{F}$ le corresponde un único elemento $\alpha \cdot x \in V$, tales que complen todas y cada una de las siguientes condiciones*

(i) *La suma es conmutativa. Para todo $x, y \in V$, $x + y = y + x$;*

(ii) *La suma es asociativa. Para todo $x, y, z \in V$, $x + (y + z) = (x + y) + z$;*

(iii) *Existe un elemento neutro, denotado por 0, tal que $x + 0 = x$, para todo $x \in V$;*

(iv) *Por cada elemento $x \in V$, existe un elemento $y \in V$ tal que $x + y = 0$;*

(v) *Para todos los elementos $x \in V$, se tiene $1 \cdot x = x$;*

(vi) *Para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ y cada $x \in V$, $(\alpha\beta) \cdot x = \alpha(\beta \cdot x)$*

(vii) *Para todo $\alpha \in \mathbb{F}$ y cada par $x, y \in V$, $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$;*

(viii) *Para cada par $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ y todo $x \in V$, $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$.*

Nota 1. *Los elementos de V se llaman* **vectores***, y llamaremos* **escalares** *a los elementos del campo $\mathbb{F}$ donde se encuentra definido V.*

Ejemplo 1. *Sea $V = \mathbb{F}^n$ el conjunto de todas las $n-$adas de elementos de $\mathbb{R}$. Sean $u, v \in V$ tales que $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ y $c \in \mathbb{F}$. Se definen las operaciones $(+)$ y $(\cdot)$ como*

$$u + v = (u_1 + v_1, \ldots, u_n + v_n), \qquad c \cdot u = (c\,u_1, \ldots, c\,u_n)$$

Ejemplo 2. *Como consecuencia del ejemplo anterior, $V = \mathbb{R}^3$, es un espacio vectorial. Sean $u, v \in \mathbb{R}^3$ tales que $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ y $c \in \mathbb{R}$. Entonces*

$$u + v = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \end{pmatrix}, \qquad c \cdot u = \begin{pmatrix} c\,u_1 \\ c\,u_3 \\ c\,u_3 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 3. *De manera similar, $V = \mathbb{C}^2$, es un espacio vectorial. Sean $u, v \in \mathbb{C}^2$ tales que $z = (z_1, z_2)$, $w = (w_1, w_2)$ y $c \in \mathbb{C}$. Entonces*

$$z + w = (z_1 + w_1, z_2 + w_2)\,, \qquad c \cdot z = (c\,z_1, z_2)$$

Ejemplo 4. *Considera $V = M_{m\times n}(\mathbb{F})$, es un espacio vectorial con las operaciones de suma de matrices y producto por escalares. Si $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ y $\kappa \in \mathbb{F}$, entonces*

$$(A + B)_{ij} = (a_{ij}) + (b_{ij}), \qquad (cA)_{ij} = c(A_{ij})$$

para $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq n$.

Ejemplo 5. *Sea $V = \mathbb{P}_n(x)$ el anillo de polinomios de grado n, es un espacio vectorial con la suma de polinomios y producto por escalares. Si $p(x), q(x) \in V$, tales que*

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \qquad q(x) = b_0 + bx + \cdots + b_n x^n$$

las operaciones de suma y producto por escalares están definidas mediante

$$(p+q)(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n$$

$$(\alpha \cdot p)(x) = (\alpha\, a_0) + (\alpha\, a_1)x + \cdots + (\alpha\, a_n)x^n$$

Nota 2. *El espacio de polinomios de grado n se emplea para el análisis de datos: método de mínimos cuadrados, regresión lineal, interpolación, series de Fourier , etc.*

Ejemplo 6. *Sea S un conjunto no vacío y F cualquier campo, consideremos el conjunto de todas las funciones definidas de S a F, lo denotaremos por $\mathfrak{F}(S, F)$. Si $f, g \in \mathfrak{F}(S, F)$, entonces este conjunto es un espacio vectorial con las operaciones*

$$(f+g)(s) = f(s) + g(s), \qquad (\kappa f)(s) = \kappa[f(s)], \ \text{con } \kappa \in F$$

para cada $s \in S$. Cabe menciona que dos funciones son iguales si $f(s) = g(s)$ para toda $s \in S$.

Ejemplo 7. *Sea F un campo. Una sucesión en F es una función σ definida en $\mathbb{N}$ y evaluada en F, es decir $\sigma : \mathbb{N} \to F$, denotaremos por $\{a_n\}$ a una sucesión σ donde a cada n, $\sigma(n) = a_n$. Sea V el conjunto de todas las sucesiones $\{a_n\}$ en F que tienen un número finito de términos a_n distintos de cero. Si $\{a_n\}, \{b_n\} \in V$ y $\alpha \in F$, definimos*

$$\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}, \qquad \alpha\{a_n\} = \{\alpha\, a_n\}$$

con estas operaciones V es un espacio vectorial.

Subspacio Vectorial

Definición 2. *Sea V un espacio vectorial, y sea W un subconjunto de V. Diremos que W es un* **subespacio vectorial** *de V si satisface las siguientes condiciones*

(i) *Si $u, v \in W$, entonnces $u + v \in W$;*

(ii) *Si $u \in W$ y α es un escalar, entonces $c\, u \in W$;*

(iii) $0 \in V$ *entonces* $0 \in W$.