Ejemplo 1: Sea $A\bar{x} = \bar{0}$, donde A se puede descomponer como LU, es decir.

$$LU\bar{x} = \bar{0}$$

Resolvemos $L\bar{y} = \bar{0}$

pero L es triangular inferior, y con 1's en su diagonal.,

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ * & & \ddots \\ * & * & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $\cdots$ $y_j = 0$.

$\bar{y} = (0, 0, \cdots 0)$

Ahora resolvemos $U\bar{x} = \bar{y}$

$$U\bar{x} = \bar{0}$$

Pero U es triangular sup. es decir, $\bar{x} = (0, \ldots, 0)$.

Ejemplo 2: (Tarea 3.4). Resolver $A\bar{x} = \bar{b}$; usando $A = LU$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-3R_1 + R_2 \to R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-2R_1 + R_3 \to R_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-\frac{1}{2}R_2 + R_3 \to R_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ya tenemos U, para construir L. U.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$ ¿Qué hay detrás de esto?

Nota:

$$U = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_3 \quad E_2 \quad E_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{A}$$

$$U = E_3 E_2 E_1 A.$$

Para obtener L hay que invertir el producto de los elementales.

$$\underbrace{(E_3 E_2 E_1)^{-1}}_{L} U = \underbrace{(E_3 E_2 E_1)^{-1}(E_3 E_2 E_1)}_{I} A$$

Así tenemos $LU = A$.

Supongamos que se tiene $A\bar{x} = \bar{b}$, con $\bar{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Entonces, hay que resolver

$$L(U\bar{x}) = \bar{b} \longrightarrow L\bar{y} = \bar{b}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \implies y_1 = -1, \; y_2 = 4, \; y_3 = -2$$

Ahora, resolvemos $U\bar{x} = \bar{y}$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \implies x_1 = 3, \; x_2 = -3, \; x_3 = -2$$