Algebra Lineal I.
(Aplicaciones Eposodio I)

Factorizacion LU

Teorema 1. *Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$. Si A se reduce a una matriz triangular superior U, sin hacer permutaciones. Entonces existe una matriz triangular inferior L no singular con 1's en la diagonal, tal que $LU = A$. Si además U tiene n pivotes (es decir, A es no sigular), entonces la factorización es única.*

Ejemplo 2. *Hallar las soluciones del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 10 & -4 & 0 \\ -3 & -2 & -5 & -2 \\ -2 & 4 & 4 & -7 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Teorema 3. *Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$. Entonces existe una matriz de permutación P tal que $PA = LU$, donde L es una matriz triangular inferior y U una matriz triangular superior. Para cada P, las matrices L, U son únicas*

Nota 4. *Puede haber más de una matriz P. Si se elige una P distinta se obtienen matrices diferentes.*

Ejemplo 5. *Resolver el sistema*

$$\begin{aligned} 2x_2 + 3x_3 &= 7 \\ 2x_1 - 4x_2 + 7x_3 &= 9 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 &= -6 \end{aligned}$$

Nota 6. *Si la matriz $A_{n\times n}$ es singular, la forma escalonada por renglones de $A_{n\times n}$ tendrá al menos un renglón de ceros, al igual que la forma triangular de $A_{n\times n}$. Es posible que todavía se pueda escribir $A = LU$ o $PA = LU$, pero en este caso U no será invertible además L y U pueden no ser únicas.*

Nota 7. *La factorización LU también es válida en algunas ocasiones para matrices rectangulares $A_{m\times n}$.*

Teorema 8. *Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, tal que A se puede reducir a su forma escalonada por renglones sin realizar permutaciones. Entonces existen una matriz $L_{m\times m}$ triangular inferior con 1's en la diagonal y una matriz $U_{m\times n}$ con $u_{ij} = 0$ si $i > j$ tales que $A = LU$.*

Ejemplo 9. $U_1 = \begin{bmatrix} d_1 & u_{12} & u_{13} & u_{14} & u_{15} \\ 0 & d_2 & u_{23} & u_{24} & u_{25} \\ 0 & 0 & d_3 & u_{34} & u_{35} \end{bmatrix}, U_2 = \begin{bmatrix} d_1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & d_2 & u_{23} \\ 0 & 0 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Modelo de Leontief

Ejemplo 10. *Supongamos que la economía de una región está dividida en n sectores que producen bienes y servicios.*

$$\left\{\begin{array}{c}\textit{monto}\\ \textit{producido}\\ \mathbf{x}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}\textit{demanda}\\ \textit{de}\\ \textit{intermediarios}\end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c}\textit{demanda}\\ \textit{final}\\ \mathbf{d}\end{array}\right\}$$

La ecuación de produccion de Leontief

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{x} & = & C\mathbf{x} & + & \mathbf{b} \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \textit{Monto} & & \textit{Sector} & & \textit{Demanda} \\ \textit{producido} & & \textit{abierto} & & \textit{Final} \end{array}$$

Supongamos que una economía depende de tres sectores: Fabricación, Agricultura y Servicios, cuyos consumos dados por $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$, respectivamente

	Ingreso consumido por unidad de salida		
Comprador	*Fabricación*	*Agricultura*	*Servicios*
Fabricación	.50	.40	.20
Agricultura	.20	.30	.10
Servicios	.10	.10	.30
	$\uparrow$ $\mathbf{c}_1$	$\uparrow$ $\mathbf{c}_2$	$\uparrow$ $\mathbf{c}_3$

(a) *¿Qué monto será consumido por el sector de Fabricación si deciden producir 100 unidades?*

(b) *Considera una demanda final de 50 unidades de Fabricación, 30 unidades de Agricultura y 20 unidades de servicios. Determina la producción final $\mathbf{x}$ que satisface esta demanda*

Podemos considerar

$$\begin{aligned} I - C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.5 & -0.4 & -0.2 \\ 0.2 & 0.7 & -0.1 \\ -0.1 & -0.1 & 0.7 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

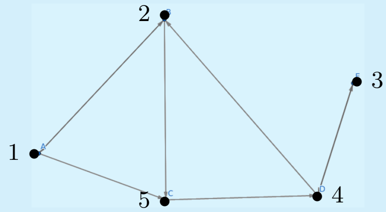
Teorema 11. *Sea $C \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ la matriz de consumo de una economía, sea $\mathbf{d}$ la demanda final. Si C y $\mathbf{d}$ tienen entradas no negativas y si en cada columna de C la suma de sus entradas es menor que 1, entonces $(I-C)^{-1}$ existe y el vector de producción $\mathbf{x} = (I-C)^{-1}\mathbf{d}$ tiene entradas no negativas y solución única*

$$\mathbf{x} = C\mathbf{x} + \mathbf{d}$$

Teoría de gráficas

Gráfica dirigida

Definición 1. *Una gráfica dirigida es un conjunto G de puntos $v_1, v_2, \ldots, v_n$ llamados* **vértices**, *junto con un número finito de* **aristas** *las cuales corresponden a parejas de vértices.*



Cualquier gráfica dirigida puede representarse mediante una matriz de $n \times n$ en donde la entrada ij corresponde al número de aristas que unen los vértices v_i con v_j.

Ejemplo 12. *Considera la grafica que aparece en la figura de la definición*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Supongamos que se analiza un sistema de comunicaciones, una red local alámbrica, donde hay 5 estaciones.

Estación	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
1		■			
2	■				■
3				■	
4		■	■		
5	■			■	

Nota 13. *Una* **cadena** *o* **trayectoria** *es la ruta que une a un vértice con otro. Una* **cadena** *que pasa por n-aristas (y por tanto por $n+1$-vértices) se llama n-***cadena**

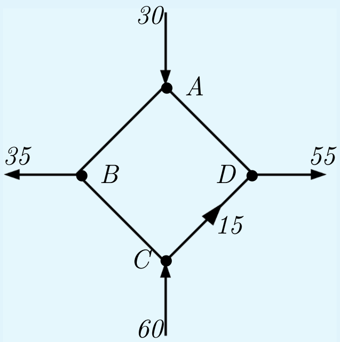
Teorema 14. *Sea A una matriz de incidencia de una gráfica dirigida. Sea a_{ij}^n la componente ij de A^n.*

(i) *Si $a_{ij}^n = k$, entonces existen exactamente k n-cadenas del vértice i al vértice j.*

(ii) *Más aún, si $a_{ij}^m = 0$ para toda $m < n$ y $a_{ij}^n \neq 0$, entonces la cadena más corta del vértice i al vértice j es una n-cadena.*

Análisis de Redes

Ejemplo 15. *Considera una red de cuatro nodos en las cuales la tasa de flujo y dirección se indican en la figura. Calcular la tasa de flujo y las direcciones en la ramas restantes*



En el nodo A se debe conservar el flujo, por lo que tenemos
$x_1 + x_2 = 30$
de manera similar para los demás nodos
$x_2 + x_3 = 35$ *(Nodo B)*
$x_3 + 15 = 60$ *(Nodo C)*
$x_1 + 15 = 55$ *(Nodo D)*

Criptografía

Ejemplo 16. *La* **Criptografía** *es la disciplina que se encarga de escribir o descifrar claves. Un* criptograma *se tratade un pasatiempo muy común, se puede tener un mensaje*

RCF P GKXGCMPG

Mismo que se puede descrifrar con una tabla decodificadora

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
P	M	V	Q	K	S	Z	O	T	B	W	I	U

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
J	C	X	E	G	Y	L	D	R	H	A	F	N

Si en cambio, usamos el código

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

Y deseamos mandar el mensaje

NO PUEDO REPROBAR

Entonces, reacomodamos el mensaje en paquetes de igual longitud, digamos de dos

NO PU ED OR EP RO BA RX

la X se agrega como verificación para tener la misma longitud en todos los paquetes. Ahora podemos escribir el mensaje usando el código y vectores

$$\begin{bmatrix} 14 \\ 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 \\ 21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 \\ 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 18 \\ 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 18 \\ 24 \end{bmatrix}$$

Croptografía

Elegimos una matriz adecuada al tamaño de los vectores, en este caso $A_{2\times 2}$, además pediremos que sea no singular, con coeficientes enteros, cuyo determinante sea ± 1; estas condiciones aseguran que A^{-1} sea entera. Digamos $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, luego aplicamos la matriz a cada vector para obtener la nueva secuencia de vectores $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

Codificación de Información Binaria

Entendemos por un **mensaje** a una secuencia finita de caracteres de un alfabeto. Si elegimos como alfabeto el conjunto $B = \{0, 1\}$. Las palabras estarán representadas por vectores binarios de tamaño m; así el conjunto de m-vectores binarios lo denotaremos mediante B^m.

Nota 17. *Una función de codificación es una función inyectiva $f : B^m \longrightarrow B^n$, esto es, cualesquiera sean x y y en B^m , $x \neq y$ implica que $e(x) \neq e(y)$. De esta manera, a palabras diferentes en B^m corresponden n-vectores diferentes en B^n.*

Ejemplo 18. *Consideremos $m = 2$, $n = 3$ y $f(b_1b_2) = b_1b_2b_3$, donde b_3 lo definiremos como 0, es decir $b_3 := 0$. Entonces*

$$f(00) = 000, \quad f(01) = 010, \quad f(10) = 100, \quad f(11) = 110,$$

la función es inyectiva. Más aún, esta función se puede expresar como

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 19. *Consideremos $m = 2$, $n = 3$ y $f(b_1b_2) = b_1b_2b_3$, donde b_3 lo definiremos como $b_3 := b_1 + b_2$. Entonces*

$$f(00) = 000, \quad f(01) = 011, \quad f(10) = 101, \quad f(11) = 110,$$

la función es inyectiva. Más aún, esta función se puede expresar como

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$