UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo
Unidad Cuajimalpa

Algebra Lineal I.

(semana 3)

Operaciones matriciales

Definición 1. *Una matriz es un* **arreglo** *rectangular de* **elementos***. Estos* **elementos** *que forman una matriz se conocen como* **entradas** *o* **componentes** *de la matriz A. Diremos que A es una matriz de tamaño $m \times n$ con entradas en $\mathbb{F}$ si el arreglo consta de m renglones y n columnas.*

Ejemplos

1. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & \frac{1}{7} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **2.** $\begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$ **3.** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 2+i & \sqrt{2} & \frac{1}{-i} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\pi}{4} & -3 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \mathrm{e}^{-2} & 1 \\ -i & -1 & i \end{bmatrix}$ **5.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{i} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt[3]{i} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Definición 2. *Sean A y B dos matrices de tamaño, $m \times n$. La* **suma** *es la matriz $A + B$ que se obtiene de sumar las entradas correspondientes de las dos matrices dadas.*

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 6.

Considera las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Definición 3. *Sean A una matriz de tamaño, $m \times n$ y $\alpha \in \mathbb{F}$ un escalar. Entonces el producto αA es la matriz que se obtiene al multiplicar cada entrada de A por α*

$$\alpha A = \alpha \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{1m} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 7.

Considera los escalares $\{-2, \sqrt{2}, \pi, i\} \subset \mathbb{C}$ y las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Definición 4. *Sean A una matriz de tamaño, $m \times n$ y B una matriz de tamaño $n \times p$. El producto AB es la matriz C de tamaño $m \times p$ cuya entrada en el i-ésimo renglón y la j-ésima columna es*

$$C = [c_{ij}]_{m\times n} = \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}\right]$$

Es decir, la operación se efectúa renglón por columna.

Nota: Cada columna en el producto AB es una combinación lineal de las columnas de A usando como pesos las columnas de B.

Ejemplo 8.

Considera las parejas de matrices

(8.1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 15 & 4 & 8 \end{bmatrix};$

(8.2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \\ 5 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 3 & 8 & -2 \end{bmatrix};$

(8.3) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix};$

(8.4) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 9 & -1 & 3 \end{bmatrix};$

Teorema 1. *Sean A, B, C matrices del mismo tamaño, con entradas en un campo $\mathbb{F}$ y sean α, β escalares. La suma y el producto por escalares satisfacen*

(i) $A + B = B + A$;

(ii) $(A + B) + C = A + (B + C)$;

(iii) $A + \mathbf{0} = A$;

iv. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;

v. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;

vi. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$.

Ejemplo 9.

Considera las parejas de matrices

(9.1) $\begin{bmatrix} 0 & -5 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -12 & 4 \end{bmatrix};$

(9.2) $\begin{bmatrix} -7 & 0 & 100 \\ -2 & 3 & -1/2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 3 & 8 & -2 \end{bmatrix};$

(9.3) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -7 \\ -6 & 10 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -6 & 7 \\ 7 & -9 \end{bmatrix};$

(9.4) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 9 & -1 & 3 \end{bmatrix};$

Teorema 2. *Sean A una matriz de tamaño $m \times n$ y B, C matrices cuyo tamaño es adecuado para realizar las operaciones indicadas*

i. $A(BC) = (AB)C$;

ii. $A(B + C) = AB + AC$;

iii. $(B + C)A = BA + CA$;

iv. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$ *para* $\alpha \in \mathbb{F}$;

v. $I_m A = A = A I_n$.

Nota: En general, $AB \neq BA$. La ley de cancelación no se cumple para el producto de matrices; es decir, si $AB = AC$, no se cumple que $B = C$. El conjunto de matrices de tamaño $m \times n$ con el producto de matrices y $\mathbf{1} = \mathrm{Id}_{m\times n}$, no es un dominio entero.

Ejemplo 10.

Considera las parejas de matrices

(10.1) $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix};$

(10.2) $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix};$

(10.3) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -5 & -4 \end{bmatrix};$

(10.4) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 9 & -1 & 3 \end{bmatrix};$

Definición 5. *Sean A una matriz de tamaño, $m \times n$. La matriz* **transpuesta** *de A es la matriz de tamaño $n \times m$, denotada por A^t, tal que sus columnas corresponden a los renglones de A.*

Teorema 3. *Sean A y B matrices de tamaño adecuado para realizar las operaciones indicadas*

(i) $(A^t)^t = A$;

(ii) $(A + B)^t = A^t + B^t$;

(iii) *Para cualquier* $\alpha \in \mathbb{F}$, $(\alpha A)^t = \alpha A^t$;

(iv) $(AB)^t = B^t A^t$.

(v) *Si $A = A^t$, entonces es una matriz* ***simétrica***.

Ejemplo 11.

Escribe las matrices transpuestas de las siguientes matrices

(11.1) $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix};$

(11.2) $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$

(11.3) $\begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 9 & -1 & 3 \end{bmatrix};$

Observación 1: Si A es una matriz de $n \times n$ y $k \in \mathbb{Z}^+$; entonces A^k denota el producto de k copias de la matriz A:

$$A^k = \underbrace{A \cdots A}_{k-veces}$$

Se define $A^0 = \mathbf{1} = Id_{n\times n}$, donde

$$\mathbf{1} = Id_{n\times n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Observación 2: Dada una matriz A de $n \times n$, diremos que es **nilpotente** si $A^k = 0$, para algún $k \geq 1$.

Ejemplo 12.

Calcula la potencia indicada de la matriz dada

(11.1) A^3, para la matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ \frac{1}{3} & -1 \end{bmatrix}$;

(11.2) A^4, para la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

(11.3) A^5, para la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$;