Algebra Lineal I.

(semana 2)

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo
Unidad Cuajimalpa

Sistemas de ecuaciones lineales.

Teorema 1 (Existencia y unicidad). *Un sistema de ecuaciones linealeses consistente si y solo si la columna de la extrema derecha no es una columna pivote, es decir que la forma escalonada no contenga un renglón de la forma*

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & b \end{bmatrix}, \text{ con } b \neq 0.$$

Si un sistema de ecuaciones lineales, entonces el conjunto de soluciones contiene

(i) *Una única solución,*

(ii) *Una infinidad de soluciones, es decir, al menos una variable es independiente.*

Ejemplos

1. Considera las matrices aumentadas correspondientes a ciertos sistemas de ecuaciones, resuelve el sistema

$$(1.1)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad (1.2)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(1.3)\ \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (1.4)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Definición 1 (Combinación lineal, ver. 1.0). *Dados ciertos vectores* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_\ell \in \mathbb{R}^n$ *y escalares* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\ell$*, el vector* $\mathbf{w}$ *definido como*

$$\mathbf{w} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_\ell\mathbf{v}_\ell \tag{1}$$

Ejemplo

2. Considera los vectores

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

determina si $\mathbf{b}$ puede escribirse como combinación lineal de $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$.

Definición 2. *Sea* $\mathbb{F}^n$ *un campo. Dados ciertos vectores* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_\ell \in \mathbb{F}^n$*, entonces el conjunto de todas las combinaciones lineales de* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_\ell$*, que denotaremos por* $Gen(\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_\ell\})$*, se llama* ***subconjunto generado de*** $\mathbb{F}^n$ *por* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_\ell$*. Es decir,* $Gen(\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_\ell\})$ *es el conjunto de todos los vectores que se pueden escribir como*

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_\ell\mathbf{v}_\ell \qquad \text{con } \alpha_i \in \mathbb{F}.$$

.

Sistemas de ecuaciones lineales.

Ejemplos

3. Considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} -2x_3 \qquad\quad + 7x_5 &= 12 \\ 2x_1 + 4x_2 - 10x_3 + 6x_4 + 12x_5 &= 18 \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 6x_4 - 5x_5 &= -1 \end{aligned}$$

Resuelve usando el método de *Gauss-Jordan*, si el sistema tiene solución(es), escribe el conjunto solución y al menos tres elementos del conjunto

$$\text{Gen}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -10 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 12 \\ 7 \\ -5 \end{bmatrix} \right)$$

.