Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Unidad Cuajimalpa

Algebra Lineal I.
(semana 1)

Sistemas de ecuaciones lineales.

Definición 1. *Supongamos que $\mathbb{F}$ es un campo. Consideremos el problema de determinar n-escalares (elementos de $\mathbb{F}$) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tales que satisfagan las condiciones*

$$\begin{array}{ccccccccc} A_{11}x_1 &+& A_{12}x_2 &+& \cdots &+& A_{1n}x_n &=& y_1 \\ A_{21}x_1 &+& A_{22}x_2 &+& \cdots &+& A_{2n}x_n &=& y_2 \\ \vdots && \vdots &&&& \vdots && \vdots \\ A_{m1}x_1 &+& A_{m2}x_2 &+& \cdots &+& A_{mn}x_n &=& y_m; \end{array} \tag{1}$$

donde, $\{y_1, \ldots, y_m\}$ y A_{ij}, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, son elementos de $\mathbb{F}$. Los escalares A_{ij} se llaman coeficientes y los subíndices denotan el renglón y la columna correspondiente en el sistema.

Definición 2. *Una lista $(s_1, \ldots, s_n)$ es una* **solución** *del sistema si al sustituirse respectivamente en $x_1, \ldots, x_n$, como en (1), se satisfacen las igualdades correspondientes. En sistema de ecuaciones lineales puede suceder que:*

(i) *tenga solución única,*

(ii) *tenga infinidad de soluciones,*

(iii) *no tenga solución.*

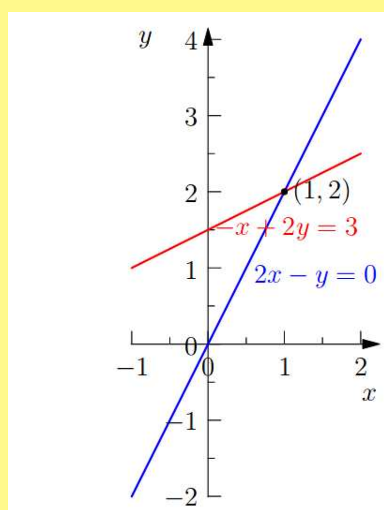
Diremos que el sistema (1) es **consistente** *si cumple las condiciones* **(i)** *y* **(ii)**, *diremos que es* **inconsistente** *si se satisface* **(iii)**.

Definición 3. *Diremos que el sistema (1) es* **homogéneo** *si $y_1 = y_2 = \cdots = y_m = 0$. Este tipo de sistemas* **siempre** *tiene una solución, a saber cuando $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$; se le conoce como solución* **trivial**. *Una solución $(x_1, \ldots, x_n)$ donde $x_j \neq 0$ es llamada solución* **no-trivial**.

Ejemplos

1. El problema central del Álgebra Lineal es resolver n- ecuaciones con n-incógnitas. Consideremos el problema más sencillo

$$\begin{aligned} 2x - y &= 0 \\ -x + 2y &= 3 \end{aligned}$$



El sistema anterior está definido en un espacio bidimensional. Veamos este problema de tres maneras.

(a) Considerando los renglones, se puede ver que $(1, 2)$ es solución del sistema pues cada ecuación representa una recta en el plano la cual se puede graficar.
Al evaluar los valores en la ecuación original, se satisfacen las ecuaciones.

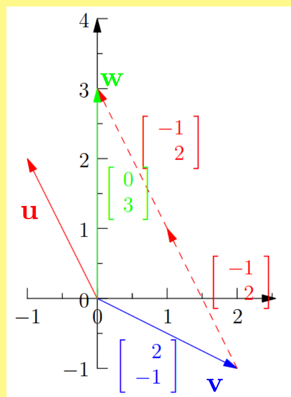
(b) Otra forma de ver la ecuación es seleccionando los coeficientes por columnas,

$$x\underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}} + y\underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{w}},$$

se han nombrado $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ a las columnas, y x, y son escalares. La ecuación se puede escribir de manera simplificada como

$$x\mathbf{u} + y\mathbf{v} = \mathbf{w},$$

tenemos una *combinación lineal* de $\mathbf{w}$ en términos de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. La solución al sistema es buscar esos escalares x, y, que al aplicarse a $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ resulten en $\mathbf{w}$.



(c) Veamos ahora usando otra notación

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}},$$

donde A es la matriz de coeficientes del sistema, $\mathbf{X}$ es el vector solución y $\mathbf{b}$ es la restricción.Sustituyendo $(1, 2)$ en lo anterior se tiene,

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Se ha realizado la multiplicación de matrices, esto es

$$\begin{bmatrix} (2)(1) + (-1)(2) \\ (-1)(1) + (2)(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

2. Considera el sistema,

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_2 - 8x_3 &= 8 \\ 5x_1 \qquad - 5x_3 &= 10; \end{aligned}$$

lo resolveremos simultáneamente con y sin notación matricial, es decir

$$\begin{array}{rcr} x_1 - 2x_2 + x_3 & = & 0 \\ 2x_2 - 8x_3 & = & 8 \\ 5x_1 \qquad - 5x_3 & = & 10 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{rrrcr} 1 & -2 & 1 & : & 0 \\ 0 & 2 & -8 & : & 8 \\ 5 & 0 & -5 & : & 10 \end{array}\right]$$

a la izquierda tenemos la ecuación original y a la derecha su *matriz aumentada*. Mantendremos x_1 en la primer ecuación y lo eliminaremos de las otras, esto es

$$\left.\begin{array}{rl} (-5)\cdot(x_1 - 2x_2 + x_3) & = (-5)\cdot 0 \\ 5x_1 \qquad - 5x_3 & = 10 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{rl} -5x_1 + 10x_2 - 5x_3 & = 0 \\ 5x_1 \qquad - 5x_3 & = 10 \\ \hline 10x_2 - 10x_3 & = 10 \end{array}$$

el resultado lo ponemos en los lugares correspondientes

$$\begin{array}{rcr} x_1 - 2x_2 + x_3 & = & 0 \\ 2x_2 - 8x_3 & = & 8 \\ 10x_2 - 10x_3 & = & 10 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{rrrcr} 1 & -2 & 1 & : & 0 \\ 0 & 2 & -8 & : & 8 \\ 0 & 10 & -10 & : & 10 \end{array}\right]$$

luego, multiplicamos la segunda ecuación por 2^{-1} y la última ecuación podemos multiplicarla por 10^{-1}, así

$$\begin{array}{rcr} x_1 - 2x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_2 - 4x_3 & = & 4 \\ x_2 - x_3 & = & 1 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{rrrcr} 1 & -2 & 1 & : & 0 \\ 0 & 1 & -4 & : & 4 \\ 0 & 1 & -1 & : & 1 \end{array}\right]$$

ahora, restamos la tercer ecuación de la segunda, es decir

$$\begin{array}{lrcr} & x_2 - 4x_3 & = & 4 \\ - & x_2 - x_3 & = & 1 \\ \hline & -3x_3 & = & 3 \end{array}$$

colocando este resultado en el tercer rengñón, se tiene

$$\begin{array}{rcr} x_1 - 2x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_2 - 4x_3 & = & 4 \\ -3x_3 & = & 3 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{rrrcr} 1 & -2 & 1 & : & 0 \\ 0 & 1 & -4 & : & 4 \\ 0 & 0 & -3 & : & 3 \end{array}\right]$$

ahora, multiplicamos la tercer ecuación por $\frac{-1}{3}$, para obtener

$$\begin{array}{rcr} x_1 - 2x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_2 - 4x_3 & = & 4 \\ x_3 & = & -1 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{rrrcr} 1 & -2 & 1 & : & 0 \\ 0 & 1 & -4 & : & 4 \\ 0 & 0 & 1 & : & -1 \end{array}\right]$$

Hemos reducido el sistema, de donde se deduce que $x_3 = -1$ y sustituyendo hacia atrás se obtiene $x_2 = 0$ y $x_1 = 1$. Así el sistema tiene el vector solución $(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, -1)$. El sistema podemos seguirlo reduciendo si seguimos efectuando operaciones entre las ecuaciones (renglones, para la forma matricial), de seguir así se puede obtener

$$\begin{array}{ccccr} x_1 & & & = & 1 \\ & x_2 & & = & 0 \\ & & x_3 & = & -1 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{rrrcr} 1 & 0 & 0 & : & 1 \\ 0 & 1 & 0 & : & 0 \\ 0 & 0 & 1 & : & -1 \end{array}\right]$$

Definición 4. *Dado un sistema de ecuaciones lineales como en* (1)*, este se puede escribir como* $A \cdot \mathbf{X} = \mathbf{b}$ *donde*

1. A *es la matriz de coeficientes del sistema, formada por los números* A_{ij}*;*

2. $\mathbf{b}$ *es el vector de restricción;*

3. $[A : \mathbf{b}]$ *es la matriz aumentada del sistema, formada por los elementos de* A *y las coordenadas de* $\mathbf{b}$*.*

La solución de un sistema de ecuaciones lineales se determina aplicando ***operaciones elementales entre renglones***, estas pueden ser

1. (Reemplazo) Suma entre renglones,

2. (Intercambio) entre renglones,

3. (Múltiplos) Producto de un renglón por una constante no nula.

3. Considera el sistema de ecuaciones y su matriz aumentada

$$\begin{aligned} x_2 - 4x_3 &= 8 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 4x_1 - 8x_2 + 12x_3 &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 & : & 8 \\ 2 & -3 & 2 & : & 1 \\ 4 & -8 & 12 & : & 1 \end{bmatrix}$$

Para proceder como en el ejemplo anterior, intercambiaremos las filas 1 y 2, obteniendo

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & : & 1 \\ 0 & 1 & -4 & : & 8 \\ 4 & -8 & 12 & : & 1 \end{bmatrix}$$

ahora, multiplicamos la primera fila por -2 y la sumamos a la tercera para eliminar el coeficiente de x_1, se tiene

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & : & 1 \\ 0 & 1 & -4 & : & 8 \\ 0 & -2 & 8 & : & -1 \end{bmatrix}$$

luego, multiplicando la segunda fila por 2 y sumando a la tercera, queda

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & : & 1 \\ 0 & 1 & -4 & : & 8 \\ 0 & 0 & 0 & : & 15 \end{bmatrix}$$

regresando a las ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_2 - 4x_3 &= 8 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 &= 15 \end{aligned}$$

Por la informaciónn en la última fila, tenemos que el sistema es inconsistente, es decir que no tiene solución.